歸謬證法

王立中

二〇一一年二月二十八日

摘要

第一、談如何改進歸謬證法，使其變得更直接：假設我們用歸謬證法證明 $A \Rightarrow C$；爲使證明變得更直接，我們試圖引進一中間命題 B 使得在證明 $(A \Rightarrow B)$ 或 $(B \Rightarrow C)$ 時，無需使用歸謬證法。以這種意義來說，關於五次方程不可解，伽羅華 (Galois) 的證明比阿貝爾 (Abel) 的證明直接；關於素數定理，初等證明比超越證明直接；關於約旦範式定理 (the Jordan normal form theorem)，雅各布森 (Jacobson) 及納爾遜 (Nelson) 的證明比赫斯坦 (Herstein) 的證明直接。第二、討論爲何直接論證優於歸謬論證。歸謬論證無法改變其粗糙、不直接、受局限的特性；兩相對照，直接論證可花較少的功夫揭示較多的相關資訊，而且容許繼續儘可能地改進結論的精確度。第三、定義歸謬論證的縮長與全長。第四、討論歸謬論證的嵌層。第五、我們探討歸謬證法的內在本質 (物理證明通常比幾何證明直接) 及如何善用其法 (選取能淘汰多數選項的方法、研究矛盾必然發生於指定路線上的情況)，並提出「如何減短歸謬證法縮長」的方案 (若原來的證明基本上是直接的，我們應避免畫蛇添足，使其徒具歸謬證法之外觀)。第一方法是從微觀入手，徹底地探討解的性質並充分利用所有資源。情況愈特殊，資源愈豐富；研究愈深入，細節愈清楚；我們便愈有可能找到解答問題的捷徑。欲找的歸謬靶與欲證定理主題的關係愈簡單、愈基本、愈密切愈好。關係簡單、基本、密切或可避免論證繞路，或能協助辨認造成矛盾的主因。藉追溯矛盾的源頭可用近歸謬靶代替遠歸謬靶。對數學科目建造細密的定理流程圖有助於用歸謬證法證明定理 A。這是因爲若將目錄或編排方法當作流程圖，不難找出與定理 A 90% 相似的定理。僞假設的不相容與兩定理間的微小差異應能使我們在比較中迅速得到矛盾。第二方法是從宏觀入手，以維恩圖 (the Venn diagram) 作指引，弄清形勢以爲佈陣之設計，並選取最弱的歸謬靶：我們假設 $A \Rightarrow B$ 且選 B 作歸謬靶，爲了得到矛盾，我們須證明"非B"，因此得考慮 B 之補集。就維恩圖而言，B 之補集比 A 之補集小。考慮較小範疇使得選 B 作歸謬靶比選 A 作歸謬靶較易得到矛盾。若能結合上述二法，雙管齊下，相輔相成，便不難找出最直接之論證。第六、我們討論如何減少歸謬論證的全長。第七、直接的概念可用以辨別證明的優劣。結論、在證明中完全地避免使用歸謬論證是數學家的最終目標；某些變分法中的歸謬論證看來似乎不可能將其直接化，可用勒貝格積分法做到。即使定理涉及選擇公理，照樣可使其歸謬論證變直接。

關鍵詞: 歸謬證法、直接、縮長、全長、嵌層、內在本質、歸謬靶、維恩圖、阿貝爾–魯菲尼定理、素數定理、約旦範式定理、簡約對、冪零變換、馬修方程、弗羅奎特解、施圖姆比較定理、勒貝格積分、變分法、Laurent 級數、有理型函數、單葉雙曲面的生成線、Grönwall 不等式、選擇公理、Kolmogorov 擴張定理、緊緻類、外測度

1 如何使歸謬論證變得更直接

假設我們用歸謬證法證明 $A \Rightarrow C$。爲使證明變得更直接，我們試圖引進一中間命題 B 使得在證明 $(A \Rightarrow B)$ 或 $(B \Rightarrow C)$ 時，無需使用歸謬證法。

例 1.1.

Ireland [21, p.145, l.6–l.17] 比 Ireland [21, p.144, l.15–l.27] 直接，因爲前者引進一中間命題：$p|N_f$.

例 1.2.

令

命題 $A_1 = (f = -\zeta'/\zeta\ )$,

命題 $A_2 = [B(x) \sim 2x\, log\, x\ ]$ (Ellison–Ellison [12, p.93, l.−2]),

命題 A_3 = [g(s) 在 $Re\ s = 1$ 上除 $s = 1$ 外無多重極點 (multiple poles)] (Ellison–Ellison [12, p.94, l.6]),

命題 A_4 = [(f 在 $Re\ s = 1$ 上僅有單極點) 且

$$Res(f; s_0) = \begin{cases} -1 & \text{若 } s_0 \neq 1 \\ 1 & \text{若 } s_0 = 1 \end{cases}$$

] (Ellison–Ellison [12, p.93, Theorem 3.9]),

以及

命題 A_5 = (f 在 $\{s|Re\ s = 1$ 且 $s \neq 1\}$ 上無極點)。

Ellison–Ellison [12, p.55, l.3] 說素數定理是 Ellison–Ellison [12, p.54, Theorem 2.10] 的一簡單推論。 Ellison–Ellison [12, p.54, Theorem 2.10] 可由 Ikehara 定理 (Ellison–Ellison [12, p.56, Theorem 2.11]) 推得。這裡 Ikehara 定理的證明用到 $A_1 \Rightarrow A_5$ (Ellison–Ellison [12, p.91, l.−8–p.92, l.2]) 。而 $A_1 \Rightarrow A_5$ 可用超越方法證明之 (Ellison–Ellison [12, p.41, l.−9–l.−1]) 。由此可知在證明素數定理時，唯一用到歸謬證法的部分是在 Ellison–Ellison [12, p.41, l.−9–l.−1]. 兩相對照, 鄂爾多斯 (Erdös) 與塞爾伯格 (Selberg) 在命題在 A_1 與 A_5之間插入三命題，並證明 A_1

$\Rightarrow A_2$ (Ellison–Ellison [12, p.96, Theorem 3.10])

$\Rightarrow A_3$ (Ellison–Ellison [12, p.94, l.7–l.14])

$\Rightarrow A_4$ (Ellison–Ellison [12, p.94, l.15–l.−2])

$\Rightarrow A_5$ (Ellison–Ellison [12, P.95, l.3–l.−1])。

$(A_1 \Rightarrow A_2)$ 與 $(A_3 \Rightarrow A_4)$ 的證明未用歸謬證法。而在證明 $A_2 \Rightarrow A_3$ 時所用的歸謬證法簡易得不足爲道。所以素數定理的初等證明比超越證明直接。

2 爲何直接論證優於歸謬論證

歸謬論證的缺點：一、其不直接性常造成不直覺；二、其粗糙本質難以滿足數學上嚴密精準的需求。換言之，歸謬論證無法改變其粗糙不直接的特性；兩相對照，直接論證容許繼續儘可能地改進結論的精確度。三、歸謬論證所能揭示的資訊有局限性，而直接論證可花最少的功夫揭示最多的相關資訊。

例 2.1. (Bessel 方程的線性獨立解)
當 ν 非整數時，試證 $J_\nu(z)$ 與 $J_{-\nu}(z)$ 爲 Bessel 方程的二線性獨立解。

直接論證. 爲防 Watson [39, p.40, l.3] 中等式右端分母爲 0，我們假設 2ν 非整數 [Watson [39, p.40, l.19]]。在此情況下，$J_\nu(z)$ 與 $J_{-\nu}(z)$ 均爲 Bessel 方程的解 [Watson [39, p.40, l.−14–l.−13]]。當 ν 爲奇數之半時，用 Watson [39, §3.11] 之法證明依 Watson [39, p.40, (8)] 定義之 $J_\nu(z)$ 與 $J_{-\nu}(z)$ 仍爲 Bessel 方程的解。然後用 Watson [39, §3.12] 之法證明 Watson [39, p.43, (2)]。 □

歸謬論證. 當 2ν 非整數時，$J_\nu(z)$ 與 $J_{-\nu}(z)$ 爲 Bessel 方程的二線性獨立解 [Guo–Wang [17, p.348, l.8–l.10]]。但關於 ν 非整數而 2ν 爲整數情況的證明，Guo–Wang [17] 隻字未提。其歸謬論證原可適用於 ν 非整數而 2ν 爲整數的情況，但必須先用 Watson [39, §3.11] 之法證明當 ν 爲奇數之半時，依 Watson [39, p.40, (8)] 定義之 $J_\nu(z)$ 與 $J_{-\nu}(z)$ 仍爲 Bessel 方程的解。然而 Guo–Wang [17, §7.3] 卻將 $J_\nu(z)$ 與 $J_{-\nu}(z)$ 表爲涉及 cos 與 sin 的級數。此舉將增加此情況的證明難度，容易讓證明留下邏輯的漏洞。 □

註. 直接論證所得結論較強：Watson [39, p.43, (2)] 同時指出當 ν 爲整數時，$J_\nu(z)$ 與 $J_{-\nu}(z)$ 線性相依；歸謬論證無此功能。諺云工欲善其事必先利其器，良不誣也。

例 2.2.

若 f 在 $[0,\infty)$ 上可積且均勻連續，則當 $t\to\infty$ 時，$|f(t)|\to 0$。

關於上述命題之證明，參見
`http://math.stackexchange.com/questions/92105/f-uniformly-continuous-and-int-a-infty-fx-dx-converges-imply-lim-x`。

此網頁的前二證明用了歸謬證法。第三證明最直接因其未用歸謬證法。然而第三證明的倒數二行應分爲兩種情況討論：情況 $|f(x_0)|<\epsilon$ 及情況 $|f(x_0)|\geq\epsilon$。此外，第三證明花最少的功夫揭示最多的相關資訊。後二證明均可推廣至多維情況。

3 歸謬論證的縮長

假設我們試圖用歸謬證法證明 $A\Rightarrow B$。首先我們假設 B 不成立，由此得出一序列的命題 $A_1, A_2, \ldots, A_m$。假設我們當達到 A_m 時得到矛盾。然後回頭檢查是否能不用假設非B 而仍可推得A_i。如果是的話，我們便將A_i 從序列中移除。在最後剩下的子序列 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 中的每一命題均須假設非B 才能成立。我們稱 n 爲歸謬論證的縮長(reduced length)。縮長的概念將已知的事與欲探究的事分開；在不計其直證部分之長度的情況下，我們用縮長的概念來測量一歸謬論證的不直接程度。縮長愈短，論證愈直接。若($B_1\Rightarrow B_2\Rightarrow\ldots\Rightarrow B_n$) 且(當達到 B_n 時得矛盾), 則知所有 B_i ($i=1,\ldots,n$) 均不成立。例如 Ahlfors [1, p.128, l.21–p.129, l.10] 中所有命題均爲證明 Ahlfors [1, p.129, Theorem 9] 而設計，但阿爾福斯 (Ahlfors) 並未將它們放入 Ahlfors [1, p.129, Theorem 9] 的證明內。這是因爲我們不必假設 Ahlfors [1, p.129, Theorem 9] 的結論不成立，而 Ahlfors [1, p.128, l.21–p.129, l.10] 中的所有命題依然成立。顯然，Ahlfors [1, p.129, Theorem 9] 的論證縮

長比 Saks [33, p.144, Theorem 6.1] 的論證縮長短。這是因爲 Ahlfors 採用強有力的工具(Ahlfors [1, p.128, l.−11–l.−9]) 以達成矛盾。在使用此工具一次後，他看出 $z = a$ 不是 $f(z) - A$ 的一本性奇點(essential singularity)。在使用此工具兩次後，他幾乎已達成矛盾。

4 歸謬論證的全長

歸謬論證的全長測量論證的直接度。一定理的推導長度計算由公設到該定理需要經過多少步驟方可推得。當考慮一歸謬論證的全長，我們必須考慮此論證中所引用的每一個定理的推導長度：所有引用定理的推導長度之和再加上此論證的縮長即爲此歸謬論證的全長。Dugundji [10, p.362, l.−2–p.363, l.15] 與 Munkres [24, p.391, l.7–l.17] 的證明均採歸謬證法且所用篇幅大致相同。這難道表示這兩證法具同樣的直接度嗎？不然。這是因爲上述篇幅僅考慮全長的一部分。仔細考慮後將發現Dugundji [10, p.361, l.6–p.363, l.15] 給出前一論證的全長; Munkres [24, p.385, l.12–p.391, l.17] 給出後一論證的全長。兩相比較，前者比後者直接。

5 計數歸謬論證的嵌層

5.1 n-層歸謬論證

假設一歸謬論證之證明中未含其他歸謬論證，則稱該歸謬論證爲1-層歸謬論證。假設我們已定義 $(n-1)$-層歸謬論證。定理 A 的證明以假設定理 A 不成立開始；此假設導致矛盾。假如在定理 A 的證明中，我們只引用一個定理需用歸謬證法證明，而此歸謬論證是$(n-1)$-層的，則我們說定理 A 的歸謬論證是 n-層的。

例 5.1.

令 S_n 爲 Zygmund [40, vol.1, p.62, (9.4)] 中所述之定理。在證明 $n = 1$ 定理成立時，不需使用歸謬證法。我們假設 S_n 成立並假設 S_{n+1} 不成立。此二假設將會發生衝突。由此歸謬論證得知 S_{n+1} 成立。繼續往裡層推，一層歸謬論證包著另一層；在證明 S_{n+1} 成立時，我們一共用了n-層歸謬證法。

5.2 $\aleph_0$-層歸謬論證

試比較 Dugundji [10, p.362, Theorem 5.4] 與 Munkres [24, p.390, Theorem 63.4] 之證明。Dugundji [10, p.362, Theorem 5.4] 之證明用了一次歸謬證法 (Dugundji [10, p.362, l.−2–p.363, l.14])。雖然 Dugundji [10, p.359, Proposition 4.1.(1)] “$\Leftarrow$” 部分的證明用到歸謬證法，但 Dugundji [10, p.362, l.7] 僅引用 Dugundji [10, p.359, Proposition 4.1.(1)] 的 “$\Rightarrow$” 部分。

對比下， Munkres [24, p.390, Theorem 63.4] 的證明中所用到的歸謬證法始於 Munkres [24, p.391, l.7] 而終於 Munkres [24, p.391, l.17] 。在 Munkres [24, p.391, l.10] 中，Munkres

引用 Munkres [24, p.389, Theorem 63.2] 兩次(C_1 ，C_2 各一次)。Munkres [24, p.389, Theorem 63.2] 的第一證明引用了博蘇克引理 (Munkres [24, p.382, Lemma 62.2])。Munkres [24, p.382, Lemma 62.2] 的證明涉及 2-層歸謬證法。 Munkres [24, p.389, Theorem 63.2] 的證明分爲兩部分：Munkres [24, p.389, l.15–p.390, l.6] 與 Munkres [24, p.390, l.7–l.26]。兩部分均用到歸謬證法。第二部分的歸納步驟用到第一部分，故 n 情況的歸謬論證被嵌進 $n+1$ 情況的歸謬論證之內。所以 Munkres [24, p.389, Theorem 63.2] 的第二證明的第二部分用了$\aleph_0$-層歸謬論證。$\aleph_0$-層歸謬論證是邏輯上最扭曲直覺的證法，我們應儘量避免使用。因 Dugundji [10, p.362, Theorem 5.4] 的證明所用歸納證法的次數比 Munkres [24, p.390, Theorem 63.4] 的證明少，故前者比後者直接。

6 如何減少歸謬論證的縮長

6.1 認清歸謬論證的內在本質

歸謬證法非直接證法，這是由於資訊不足或在證明過程中未能充分運用已有資訊所造成。若能充分運用已有資訊或者強化假設中的條件使我們能運用更多的資源，我們就有可能避免使用歸謬證法。例如 Birkhoff–Rota [5, p.26, Theorem 7] 的證明用了歸謬證法，而Grönwall 不等式 [Hartman [18, p.24, Theorem 1.1]] 的證明不必使用歸謬證法。因此歸謬證法可視爲尚無直接通路可循的繞道證法。在證明中若能使用較初等的方法，則證明會變得更直接。

例 6.1. (Laurent 級數的唯一性)

Watson–Whittaker [38, p.100, l.4–l.−10] 未用歸謬證法證明了 Laurent 級數的唯一性，而 ’s proof given in Watson [39, p.372, l.7–l.10] 中的 Cauchy 證明使用了歸謬證法。前一證明需知所予函數 f 之明確值，而後一證明可應用於任一有理型函數 (meromorphic function)。換言之，前一證明需要更明確的資訊，而後一證明可應用於一般情況。

例 6.2. (**約旦曲線定理；約旦曲線之補集至少含兩分支**)

Ahlfors [1, p.118, Exercise 3] 無需用歸謬證法。兩相對照，Munkres [24, p.391, l.1–l.6] 的證明引用了約旦分離定理 Munkres [24, p.379, Theorem 61.3]，而後者的證明須用不容忽視的歸謬證法 (Munkres [24, p.379, l.−4])。假使約旦曲線是一封閉的多邊形，我們甚至可用初等幾何來證此定理 (Saks [33, chap. IV, §11])。在前述三者之中，以 Ahlfors 的證明爲最好，因其指出繞的圈數乃證此定理的關鍵所在。

我們應將一歸謬論證儘可能地濃縮，其法如下：一、盡可能將論證變得更直接。二、在論證中找出無需假設「欲證定理的結論爲僞」即可證出其爲眞的命題。三、將步驟二中找出的命題從歸謬論證中移除。

例 6.3.

在 Narasimhan [25, p.27, Theorem 6] 的證明中，我們用歸謬證法證明 $r_0 = r$ (Narasimhan [25, p.27, l.20])。此證明似乎相當長 (Narasimhan [25, p.27, l.−15–l.−1])。然而我們可將大部分的證明「摘要且正面」地敘述成下一引理：

引理 令 $D = D(a,r)$ 且 $f \in H(D)$。若存在一函數 F 使得在 $D(a,q)$ (其中 $q < r$)上滿足 $F' = f$，則存在一正數 $e > 0$ 使得擴展定義域後的 F 在 $D(a,q+e)$ 上滿足 $F' = f$。

證此引理不需使用歸謬證法，也不必假設 $r_0 < r$。現在假設 $r_0 < r$。由上述引理知在 $D(a,q+e)$ 上存在一函數使得 $F' = f$。此與 r_0 之定義相矛盾。因此這歸謬論證之縮長爲2。

爲減短歸謬論證的縮長，我們應以直接推理的方式儘量去接近解：方法是透徹地探討解的性質並充分利用所有資源。

例 6.4.
Bellman [4, p.10, Exercise 3] 的證明使用了歸謬論證，而 Bellman [4, p.10, Theorem 2] 的證明未使用歸謬論證。我們注意 Bellman [4, p.10, l.21] 中所引用的唯一性定理是解的一般性質，而 Bellman [4, p.10, (4)(a)] 是僅「特殊解 Y 的行列式 $|Y|$」才有的額外性質。我們也注意 Bellman [4, p.10, (3)] 已是 $|Y|$ 的完美解答。

6.1.1 物理證明通常比幾何證明直接

例 6.5. (Pfaffian 微分方程可積性的幾何判據)
對於 Sneddon [34, p.35, Theorem 8]，Carathéodory 的熱力學證明比 Born 的幾何證明直接。此乃因後者於 Sneddon [34, p.38, l.−16–l.−9] 中用到歸謬證法。從 Sneddon [34, p.36, Fig. 11] 中路線與 Reif [29, p.160, (5·4·2)] 中積分路線的相似性看來，Carathéodory 的想法源自解 Reif [29, p.160, (5·4·1)]。其證明與用準靜過程來測量熵的方法密切相關。若不知其物理意義，則難以了解 Carathéodory 證明的精義。兩相對照，Born 的證明僅涉及 Pfaffian 微分方程解的幾何形狀。Born 的方法不能用來測量熵。
註. 柱面的連續變形 [Sneddon [34, p.38, l.−15–l.−14]] 指將 σ 的截面積縮至 0。可達點帶 [Sneddon [34, p.38, l.−13–l.−12]] 指線段 IG_0。

6.2 若原來的證明基本上是直接的，我們應避免畫蛇添足，使其徒具歸謬證法之外觀

我們不應沒必要地將事情複雜化。

例 6.6.
若刪除前四字及最後一句，則 Ince [20, p.212, l.10–p.213, l.3] 中的證明是直接的。Coddington–Levinson [7, p.292, l.−7] 沿襲 Ince 的風格使用無必要的歸謬證法。Ince [20, p.213, l.−7–−4] 中的證明未用歸謬證法。然而 Coddington–Levinson [7, p.293, l.−7] 將此 Ince 的論證又無必要地加上歸謬證法之外觀。
註. 雖然 Ince [20, p.212, l.4] 中等式與 Coddington–Levinson [7, p.288, (2.5)] 中等式同，但後一形式可使我們較易認出伴隨邊界值問題間結構上的關係。

6.3 如何善用歸謬證法

6.3.1 選取能淘汰多數選項的方法

例 6.7.

因 A_1B_1 與 A_2B_2 不相交，故 $\alpha \neq 0$ [Bell [2, p.165, l.3]]。因 A_3B_3 與 $A_1B_1 \cup A_2B_2$ 不相交，故 $0 \neq \beta \neq \alpha$ [Bell [2, p.165, l.3]]。
若 Bell [2, p.164, l.−3] 所予三直線中之任二直線都不平行且依 Bell [2, p.164, l.−3–p.165, l.12] 所述之手續製造二次曲面，則 Bell [2, p.165, l.12] 中方程代表一雙曲拋物面 [Bell [2, p.165, l.14]]。

證一. (選取能淘汰多數選項的方法)
因 Bell [2, p.164, l.−3] 所予三直線中之任二直線都不平行，故 $l \neq 0, m \neq 0$。
$\Delta = \alpha^2\beta^2m^2l^2(\alpha-\beta)^2 \neq 0$。由 Fine–Thompson [14, p.232, Table] 中 Δ-欄得情況 (a) 或情況 (c)。並且 $D = 0$，故得情況 (c) [Fine–Thompson [14, p.232, Table]]。 □

證二. (找出兩選項間之最大不同處) [Bell [2, p.163, l.−3–p.164, l.−4]] 證明若三直線不平行於同一平面且兩兩不相交，則過此三直線的二次曲面爲單葉雙曲面。事實上，其逆亦眞。即

引理. 在單葉雙曲面同一系統中的任三生成線不會平行於同一平面。

引理之證明. λ-生成線的方向餘弦與
$(\frac{1}{a}, \frac{-\lambda}{b}, \frac{1}{c}) \times (\frac{1}{a}, \frac{1}{b\lambda}, -\frac{1}{c}) = (\frac{1}{bc}(\lambda - \frac{1}{\lambda}), \frac{-2}{ac}, \frac{1}{ab}(\lambda + \frac{1}{\lambda}))$ 成比例。
$\begin{vmatrix} \frac{1}{bc}(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1}) & \frac{-2}{ac} & \frac{1}{ab}(\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1}) \\ \frac{1}{bc}(\lambda_2 - \frac{1}{\lambda_2}) & \frac{-2}{ac} & \frac{1}{ab}(\lambda_2 + \frac{1}{\lambda_2}) \\ \frac{1}{bc}(\lambda_3 - \frac{1}{\lambda_3}) & \frac{-2}{ac} & \frac{1}{ab}(\lambda_3 + \frac{1}{\lambda_3}) \end{vmatrix} = \frac{-4}{a^2b^2c^2}(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3) \neq 0$。. □

因二次曲面經過且不平行於同一平面且兩兩不相交的三直線 [Bell [2, p.163, l.−3–l.−2]]，由引理知此二次曲面不可能爲單葉雙曲面。因所予三直線中之任二直線都不平行，故 Fine–Thompson [14, p.232, Table] 中之情況 (d) 及情況 (e) 均不可能。 □

證三. (利用證明目標的主要性質) 雙曲拋物面爲我們的證明目標且 Bell [2, p.150, l.2–l.3] 中之命題爲其主要性質。 λ-生成線 $z = \frac{-\beta my}{\lambda}, lx(\alpha-\beta) - \beta my = \lambda$ 的方向餘弦與 $(0, \frac{\beta m}{\lambda}, 1) \times (l(\alpha-\beta), -\beta m, 0) = (\beta m, l(\alpha-\beta), -\frac{\beta m}{\lambda}l(\alpha-\beta))$ 成比例。因而所有的λ-生成線皆平行於平面 $lx(\alpha-\beta) - \beta my = 0$。由證二中引理知此二次曲面不可能爲單葉雙曲面。 □

6.3.2 有時矛盾必然發生於指定路線上

設定理 $A = [z \in S \Rightarrow (z$ 具性質 $T)]$ 且定理 $B = [z \notin S \Rightarrow (z$ 不具性質 $T)]$。若定理 B 爲眞且已證定理 A，則可設 $z \notin S$，然後依照定理 A 的證法來證定理 B。在某階段，證

明鏈必將中斷，於是得矛盾。

例 6.8. (過二定點之直線 [Fine–Thompson [14, p.12, l.-4–p.13, l.3]])
設 $z=(x,y)$, $S=P'P''$, and (z 具性質 T) $=$ [(x,y) 滿足 Fine–Thompson [14, p.12, (1)]]。

註 1. 我們可以直線之參數表示法避免使用歸謬證法，但上述證法保證必能得所欲證。

註 2. 其他例子：Fine–Thompson [14, p.52, l.-2–p.53, l.3; p.71, l.-3–p.72, l.2; p.101, l.-7–l.-6]。

6.4 選擇適當的歸謬靶

6.4.1 藉追溯矛盾的源頭可用近歸謬靶代替遠歸謬靶

例 6.9. (破產所需步驟數的期望值)
欲證 $v(z)=\infty(z\geq 1)$ [Borovkov [6, p.63, l.-3–l.-1]]。

證明. $v(2)=2v(1)-2$ [Borovkov [6, p.64, l.4]]。
$v(z)=zv(1)$ [用歸納法]。
故 $v(1)-1=v(1)$。 □

註. Borovkov [6, p.64, l.1–l.14] 中的證明選 $v(z)<\infty$ 爲其歸謬靶，而上述證明選 $v(1)<\infty$ 爲其歸謬靶。

6.4.2 選擇「與欲證定理主題的關係最簡最近」之歸謬靶

在一歸謬論證中，若能選擇「與欲證定理主題的關係最簡最近」之歸謬靶，並且更直接地向目標推進，我們將會較快得到矛盾。

例 6.10. (集合[0,1]不可數)
Rudin [31, p.36, Theorem 2.43] 的證明使用緊緻的概念。 Royden [30, p.56, Corollary 4] 使用下確界的概念；參見外測度之定義 (Royden [30, p.54, l.9])。在對比下，Pervin [27, p.20, Theorem 2.1.4] 的證明使用與主題更相關的概念：可數性。所以第三證明最快得到矛盾。

例 6.11.
我們先假設 E^2 被一約旦曲線分割後的分支數大於二。若採用 Dugundji [10, p.362, Theorem 5.4] 的論證，此假設將與 Dugundji [10, p.362, Theorem 5.2] 衝突；若採用 Munkres [24, p.390, Theorem 63.4] 的論證，此假設將與 Munkres [24, p.385, Theorem 63.1(c)] 衝突。Dugundji [10, p.362, Theorem 5.2] 涉及簡單概念「x 與 y 屬於 $\mathscr{C}J$ 中不同的分支」(Dugundji [10, p.361, l.-1])，而 Munkres [24, p.385, Theorem 63.1(c)] 卻涉及較複雜概念「基本群的子群」。前一概念與約旦曲線 J 有密切關係，而後一概念與約旦曲線的關係較間接。因此無論就歸謬靶與主題關係的簡繁或遠近言， Dugundji 的證證明都會比Munkres 的證明快些得到矛盾。

例 6.12. (分類方法若合乎需求，得到矛盾較快)
若 $\Delta = 0$ 且 $|b_1, c_2, d_3| \neq 0$，則三平面平行於一直線 [Bell [2, p.50, l.8–l.10]]。

證明. 三平面相交的方式可分爲 8 種情況：

情況 1： 三平面平行且互異。

情況 2： 兩平面相同，第三平面與其平行。

情況 3： 三平面全同。

情況 4： 兩平面相同，第三平面與其相交。

情況 5： 兩平行平面與第三平面相交。

情況 6： 法線共面，三平面兩兩相交，交線互異。

情況 7： 三平面交於一直線。

情況 8： 三平面交於一點。

I 分類方法取決於法線是否平行：

(1) 三法線均平行：Cases 1, 2 & 3.
(2) 僅二法線平行：Cases 4 & 5.
(3) 無二法線平行：Cases 6, 7, & 8.

II 分類方法基於方程組的一致性：

(1) 有解方程組：Cases 8, 7, 4, & 3.
(2) 無解方程組：Cases 6, 5, 1, & 2.

因方程組無解 [Bell [2, p.49, (4)]]，故第二分類法較合需求。若採用第二分類法，可快些淘汰不可能的情況。 □

例 6.13.

在單葉雙曲面上，同一系統中任二生成線不相交 [Bell [2, p.155, l.1]]。Bell [2, p.155, l.2–l.5] 給予第一證明；Bell [2, p.155, l.6–l.10] 給予第二證明。第一證明用聯立方程解爲歸謬靶，而解即二生成線之交集。兩相對照，第二證明用三共面生成線爲歸謬靶。此靶比第一證明之歸謬靶與定理主旨關係較遠，故第二證明比第一證明複雜。
註. 第二證明的論證需加澄清。假設 λ-系統之二生成線 r, s 相交於 R。由 Bell [2, p.153, l.−11–l.−9] 知至多能有二生成線可通過 R，故可在 μ-系統中找出不通過 R 的生成線。由 Bell [2, p.155, l.11–l.12] 知 t 必交 r 於 P 且交 s 於 Q。

假設欲乘公共汽車從住址 A 到住址 B，可參見公車路線圖。網路愈細密，從 A 到 B 愈容易。這是因爲可找到離 A 或 B 較近的公車站。同樣地，對數學科目建造細密的定理流程圖有助於用歸謬證法證明定理 A。這是因爲若將目錄或編排方法當作流程圖，不難找出與定理 A 90% 相似的定理。僞假設的不相容與兩定理間的微小差異應能使我們在比較中迅速得到矛盾。

例 6.14.
不與直線 A, B 及 C 相交的第四條直線 D 一般來說會與二次曲面交於兩點 P 與 Q，而 μ-系統中過 P 及 Q 的二生成線爲與直線 A, B, C, D 相交的僅有二直線 [Bell [2, p.165, l.−15–l.−12]]。

證明. 若存在三直線且其中每一線均與直線 A, B, C, D 相交，則由 Bell [2, p.165, l.−8–l.−6] 中之命題知 A, B, C, D 均爲二次曲面的生成線。此與 D 交二次曲面於 P, Q 兩點 [Bell [2, p.165, l.−15–l.−14]] 的假設相矛盾。 □

註. 此例把 Bell [2]，一本內容豐富、層次分明的解析幾何課本，當作定理流程圖。

6.4.3 我們應儘量選擇較基礎的歸謬靶

欲用歸謬論證證明 $A \Rightarrow B$，我們先假設 B 爲僞。這假設將會與某定理 S 相衝突。假如 S 是一高等定理，須經許多步驟方可證其爲眞，我們便難以指出那一步驟是導致矛盾的主因。以這種意義來說，我們應選擇較基礎的歸謬靶。例如若「S 且 T」與 S 均可作爲歸謬靶，我們應選 S 作爲我們的歸謬靶。

例 6.15.
試比較 Rudin [31, p.208, Theorem 9.34] 與 Courant–John [9, vol.2, pp.36–37, §1.4.d] 的證明。

例 6.16.
欲證 $\{y \in Y : f_0(y) = f_1(y)\}$ 爲一閉集 (Massey [23, p.152, l.−16])，我們可用豪斯多夫空間 (Hausdorff space) 的一般性質 (Dugundji [10, p.138, 1.2(4)]) 而不用覆蓋空間 (covering space) 的特殊性質 (Massey [23, p.152, l.−12–l.−6]) 來縮減證明長度。前者可減低設定的複雜性且避免邏輯繞道。

6.4.4 我們應儘量選擇較弱的歸謬靶

用歸謬證法證明 $A \Rightarrow B$，我們先假設爲B 僞。這假設將會與某一事實 S 相矛盾。若欲減短歸謬論證的縮長，我們應選取最弱的歸謬靶。也就是說，定理 S 應含最少條件。這是因爲一歸謬靶僅需較少條件來描述其特徵將使我們較易有效地瞄準目標。這可用集合論中的維恩圖 (the Venn diagram) 來說明：集合 B 包含集合 A 若且唯若性質 B 比性質 A 弱；假設 $A \Rightarrow B$ 爲眞而我們選 B 作歸謬靶，爲得矛盾我們須證明「非B」；於是得考慮 B 之補集，在維恩圖中它比 A 之補集小；在較小範圍內考慮是「選取弱歸謬靶」比「選

取強歸謬靶」較易得到矛盾的原因。

在以下三例中，我們試圖證明若 $t \in G$，則 $\{2\omega_1, 2\omega_2\}$ 爲基本週期的一簡約對 (reduced pair of fundamental periods; González [16, p.370, l.−9–l.−8; p.369, Definition 5.4])。

例 6.17. (證明未使用歸謬證法)

Proof. 爲了找基本週期的一簡約對，我們須考慮週期的一般形式：
$\omega = 2m\omega_1 + 2n\omega_2$。我們試圖在 $\{2\omega_1, 2\omega\}$ 中找簡約對，
因 $[|\tau| \geq 1 \Rightarrow (\omega_1$是具最小絕對值的非零週期$)]$。
考慮下列情況：

(a) $n = 0$: $Im\,(\omega/\omega_1) = 0$ (González [16, p.370, l.−7–l.−5]).

(b) $n \notin \{0, 1, -1\}$: $|\omega| > |\omega_2|$ (González [16, p.371, l.16–l.22]).

(c) $n = -1$ 且 $m = 0$: $Im\,(\omega/\omega_1) < 0$ (González [16, p.371, l.5–l.6]).

(d) $n = -1$ 且 $m \neq 0$: $Im\,(\omega/\omega_1) < 0$ (González [16, p.371, l.14–l.15]).

(e) $n = 1$且 $m = 0$: $max\,(|\omega_1|, |\omega_2|) < |\omega|$ (González [16, p.371, l.1–l.5]).

(f) $n = 1$ 且 $m \neq 0$: $|\omega| = |\omega_2|$ (González [16, p.371, l.7–l.11]).

因爲我們在 $\{2\omega_1, 2\omega\}$ 中找簡約對，所以可將(a), (b), (c),及(d)諸情況從考慮中擯除。由(e) 與(f) 知 $\{2\omega_1, 2\omega_2\}$ 爲基本週期的一簡約對。 □

註：在 González [16, p.371, l.5] 中，González 宣稱 $\{2\omega_1, 2\omega_2\}$ 是一簡約對。此言有誤因他僅在 $n = \pm 1$ 的情況下證明 $|\omega| \geq |\omega_2|$ (González [16, p.371, l.1])，但在其他情況並未證明 $|\omega| \geq |\omega_2|$。同樣地，González [16, p.371, l.11–l.12] 中的命題也不正確。

例 6.18. (論證採用強歸謬靶)

證明. 假設序對 $\{2\omega_1, 2\omega_2\}$ 非簡約。
因 $[|\tau| \geq 1 \Rightarrow (\omega_1$是具最小絕對值的非零週期$)]$，
存在一簡約對 $\{2\omega_1, 2\omega\}$，其中
$\omega = 2m\omega_1 + 2n\omega_2 \quad (*)$。以下我們用 $(*)$ 作爲歸謬靶。由 González [16, p.369, Definition 5.4] 知 $Im(\omega/\omega_1) > 0$ 且 $|\omega| < |\omega_2| \quad (**)$。考慮下列情況：

(a) $n = 0$: $Im\,(\omega/\omega_1) = 0$ (González [16, p.370, l.−7–l.−5]).
由 González [16, p.369, Definition 5.4] 知 $\{2\omega_1, 2\omega\}$ 非簡約對。此與 $(*)$ 相矛盾。

(b) $n \notin \{0, 1, -1\}$: $|\omega| > |\omega_2|$ (González [16, p.371, l.16–l.22]).
由 González [16, p.369, Definition 5.4] 知 $\{2\omega_1, 2\omega\}$ 非簡約對。此與 $(*)$ 相矛盾。

(c) $n = -1$ and $m = 0$: $Im\,(\omega/\omega_1) < 0$ (González [16, p.371, l.5–l.6]).
由 González [16, p.369, Definition 5.4] 知 $\{2\omega_1, 2\omega\}$ 非簡約對。此與 $(*)$ 相矛盾。

(d) $n = -1$ and $m \neq 0$: $Im\,(\omega/\omega_1) < 0$ (González [16, p.371, l.14–l.15]).
由 González [16, p.369, Definition 5.4] 知 $\{2\omega_1, 2\omega\}$ 非簡約對。此與 $(*)$ 相矛盾。

(e) $n = 1$ and $m = 0$: $max\,(|\omega_1|, |\omega_2|) < |\omega|$ (González [16, p.371, l.1–l.5]).

(f) $n = 1$ and $m \neq 0$: $|\omega| = |\omega_2|$ (González [16, p.371, l.7–l.11]).

由(e) 與(f) 知 $\{2\omega_1, 2\omega_2\}$ 爲一簡約對。但此與假設 "$\{2\omega_1, 2\omega_2\}$ 非簡約" 相矛盾；因此假設錯誤。 □

例 6.19. (論證採用弱歸謬靶)

證明. 因 $(*) \Rightarrow (**)$，故 $(*)$ 的條件較強。現用較弱的 $(**)$ 作歸謬靶。除紅行
由 González [16, p.369, Definition 5.4] 知 $\{2\omega_1, 2\omega\}$ 非簡約對。此與 $(*)$ 相矛盾。
代以綠行
此與 $(**)$ 相矛盾。
外，證明與例 6.18 同。 □

例 6.20. (論證採用弱歸謬靶)
假設我們欲證阿貝爾–魯菲尼定理 (the Abel–Ruffini Theorem; Jacobson [22, vol.3, p.104, l.−2–l.−1])。此定理可由 Jacobson [22, vol.3, p.104, Theorem 7]， van der Waerden [35, vol.1, p.149, Theorem] 及 Edwards [11, p.61, l.17–l.18] 推得。我們用伽羅華群的可解性作爲歸謬靶。由此可解性我們可推出 Edwards [11, p.91, Galois' Theorem] 的結論。假如我們用 Edwards [11, p.91, Galois' Theorem] 的結論作爲歸謬靶，則證明將大爲直接化 (Edwards [11, p.91, l.10–l.16])：比較二自然數的大小比決定伽羅華群的可解性容易多了。所以伽羅華的歸謬論證 (Edwards [11, p.91, l.10–l.16]) 比阿貝爾的歸謬論證 (van der Waerden [35, vol.1, p.176, l.−6–p.177, l.13]) 更直接。在 Edwards [11, p.91, Galois' Theorem] 中，我們深入探討可解性，並在特殊情況下，得到更明確的結果。Edwards [11, p.65, l.10–l.14; p.91, l.17–l.23] 討論了伽羅華方法的更多優點。在證明方向
（非"Edwards [11, p.91, Galois' Theorem] 的結論"）
⇒ （非"Edwards [11, p.91, Galois' Theorem] 的假設"，即伽羅華群不可解）
⇒ （一般化的五次方程不可解），
我們藉著專注較少條件找出造成矛盾的主因。
註： Jacobson [22, vol.3, p.107, Theorem 8] 的證明說明如何建造質次不可解的整係數多項式。

例 6.21. (約旦範式)
Nelson [26, Theorem 8] 的證明未用歸謬證法。由 Nelson [26, (9) 及緊接 Theorem 8 之證明後的例子] 可知將一矩陣簡化爲約旦範式的要訣在用聰明的方法計數基中元素。唯有將方法組織化、精簡化之後，方能避免使用歸謬證法。數學歸納法對證明結構的組織化很有幫助，因它能明確定位關鍵步驟。由 Nelson [26, 緊接 Theorem 8 之證明後的例子] 的計數基元素方法可知，Nelson [26, Theorem 8] 逐列計數，而 Herstein [19, p.294, Theorem 6.5.1] 逐行計數。逐列計數比逐行計數簡單，因爲我們可利用 Nelson [26, (9)] 的嵌層結構。更明確地說，Nelson [26, Theorem 8] 計數 $\mathcal{N}N_i/\mathcal{N}N_{i-1}$ 中的基元素，而 Herstein [19, p.295,

Lemma 6.5.4] 計數 V/V_1 中的基元素。後者的基元素數較前者多，故 Herstein [19, p.295, Lemma 6.5.4] 中的歸謬論證欲得矛盾變得較難。事實上，Herstein [19, p.295, Lemma 6.5.4] 的證明假設 $V \neq V_1+W$ 並試圖用 Herstein [19, p.295, l.15–l.16] 中的事實證明 $V/(V_1+W)$ 具空基。我們應將 Herstein [19, p.295, l.6–l.17] 移到 Herstein [19, p.295, Lemma 6.5.4] 證明的歸謬論證之外，因 Herstein [19, p.295, l.15-l.16]是 Herstein [19, p.295, l.4–l.5]及 $z \notin V_1 + W$ 的直接結果。只有 W 具最大維數與 Herstein [19, p.295, l.15–l.16] 中的事實相矛盾。
註：當 Herstein 將冪零變換 (nilpotent transformations) 的情況從一般情況中分離出來討論，唯一性的證明結構立刻變得很清楚。雖然 Nelson [26, Theorem 8] 的證明側重於製造約旦範式手續的精要部分並給予直接論證，但所用方法不及 Jacobson [22, vol.2, chap.III, §11, p.92, l.−10–p.94, l.−4] 中的方法有效且實際。這是因爲在實際計算時很難得到 Nelson [26, Theorem 8] 中之 $\beta_1, \ldots, \beta_k$。在對照下， Jacobson [22, vol.2, chap.III, §11, p.92, l.−10–p.94, l.−4] 是由「求約旦範式的計算」理論化得來。因設計根據實際計算，故其論證是直接的。Jacobson [22, vol.2, chap.III, §11] 中所述古典範式的存在性可推廣到 $\mathfrak{R}$ 爲一$\mathfrak{o}$–模的情況，其中$\mathfrak{o}$ 爲一主理想整環 Jacobson [22, vol.2, chap.III, p.86, Theorem 6, p.86, l.−5–l.−3; p.88, Theorem 7]。Jacobson [22, vol.2, chap.III, §11] 中所述古典範式的唯一性得自 Jacobson [22, vol.2, p.91, Theorem 11 and Theorem 12]。故對範式的唯一性而言， Nelson [26, Theorem 8] 的證明比 Jacobson [22, vol.2, p.91, Theorem 10] 的證明具體，因前者的設定具較多資源。

例 6.22. (常數係數高次常微分方程)

欲證 Coddington–Levinson [7, p.89, (6.20)] 中之向量爲線性獨立。 Collatz [8, II§4, sec.12] 的證明用 Collatz [8, p.97, l.19–l.22] 中的命題爲歸謬靶。Pontryagin [28, pp.50–51, Theorem 5] 的證明藉對結構做更深入的探討及採用 Pontryagin [28, p.52, (B)] 爲歸謬靶將使上論證變得較直接。下述 Coddington–Levinson [7, p.89, Theorem 6.5] 的證明無需用歸謬證法：
設 V 爲 Coddington–Levinson [7, p.89, (6.20)] 中向量所生成的空間，D 爲 V 上的微分運算，且 $V_i = \mathscr{N}(D - \lambda_i I)^{m_i}$。
設 $\sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{m_i-1} c_{ik} t^k e^{\lambda_i t} = 0$。
因 $\sum_{k=1}^{m_i-1} c_{ik} t^k e^{\lambda_i t} \in V_i$，故
$\sum_{k=1}^{m_i-1} c_{ik} t^k e^{\lambda_i t} = 0 (i = 1, \ldots, s)$ (Nelson [26, Theorem 6]).
固定 i 得 $\sum_{k=1}^{m_i-1} c_{ik} t^k = 0.$

由上述諸例可看出若採用弱歸謬靶可減短歸謬論證之縮長。強歸謬靶需用較多條件來描述其特點。若走向極端，選一不具條件的歸謬靶，則所得論證無需使用歸謬證法。

7 如何減少歸謬論證的全長

假設一定理有之二證明均未使用歸謬證法。若證明一短一長，則短的證明較直接。故僅考慮歸謬論證並不足以決定一論證的直接與否。同時亦可看出在考慮歸謬論證時，我們應考慮其全長而非縮長。

例 7.1. (馬修方程 [Mathieu's equation] 週期解的唯一性)

Guo–Wang [17, p.617, l.−12–p.619, l.13] 與 Elsevier [13, §32.3, NONPERIODICITY OF SECOND SOLUTION, p.20] 均證明如下命題：

若 $q \neq 0$，則 Guo–Wang [17, p.610, (1)] 至多有一週期解。

Guo–Wang [17, p.610, (1)] 是 Guo–Wang [17, p.614, (1)] 之一特例。在較一般的設置中，一數學名詞僅需滿足較少條件，故比較其性質較易認同二物。由於證明唯一性屬爲較一般的設置所設計的論證，故在較一般的情況，其證明較短 (Wang [37, §3.1])；即使較具體的情況可有較靈活的證法。若考慮上二證明的全長，Guo–Wang [17, p.617, l.−12–p.619, l.13] 應比 Elsevier [13, §32.3, NONPERIODICITY OF SECOND SOLUTION, p.20] 短。

註 1： 關於 Guo–Wang [17, p.614, l.7] 的弗羅奎特解 (a Flouquet solution) 之存在性可參見 Elsevier [13, §32.3, FLOQUET'S THEOREM, p.21]。

註 2： 若在 Elsevier [13, §32.3, NONPERIODICITY OF SECOND SOLUTION, p.20] 中強加一額外條件：一週期解爲偶函數，則此情況之證明較下情況爲短：一週期解爲奇或偶函數。此易從維恩圖得知。故爲較具體的設置而設計的論證，情況愈明確，其證明愈短。

8 直接的概念可用以辨別證明的優劣

例 8.1. (施圖姆比較定理)(The Sturm comparison theorem; Birkhoff–Rota [5, pp.267–268, §10.6])

Ince [20, §10.31] 的歸謬論證被包含在 Ince [20, p.226, l.12–l.15] 中。究其所爲僅將 0 與正數相比，故此歸謬論證微不足道。現計數 Birkhoff–Rota [5, p.268, Theorem 3] 的證明中所用歸謬證法的次數。

(1) 預備知識

  (a) Birkhoff–Rota [5, p.26, Theorem 7] 的證明在 Birkhoff–Rota [5, p.26, l.−12–l.−3] 中使用了不容忽視的歸謬論證。此歸謬論證不容忽視乃因 Birkhoff–Rota [5, p.26, l−6] 使用了 Birkhoff–Rota [5, p.24, Lemma 2]。

  (b) Birkhoff–Rota [5, pp.26–27, Theorem 8] 的證明用了兩次 Birkhoff–Rota [5, p.26, Theorem 7]。

  (c) Birkhoff–Rota [5, p.27, Corollary 1] 得自 Birkhoff–Rota [5, pp.26–27, Theorem 8]。

(d) Birkhoff–Rota [5, p.27, Corollary 2] 的證明在 Birkhoff–Rota [5, p.27, l.−11–l.−5] 中使用了另一不容忽視的歸謬論證。此歸謬論證不容忽視乃因 Birkhoff–Rota [5, p.27, l.−7] 使用了 Birkhoff–Rota [5, pp.26–27, Theorem 8]。

(2) (a) Birkhoff–Rota [5, p.268, l.9] 中使用 Birkhoff–Rota [5, pp.26–27, Theorem 8]。

(b) 爲了證明 $\theta(x) \equiv \theta_1(x)$ given in Birkhoff–Rota [5, p.268, l.12]，我們須使用 Birkhoff–Rota [5, p.27, Corollary 2]。

(c) 爲了證明 Birkhoff–Rota [5, p.268, l.16–l.17] 中之命題，我們須使用 Birkhoff–Rota [5, pp.26–27, Theorem 8, Corollary 1 & Corollary 2]。

註： Ince [20, §10.31] 所用的歸謬論證微不足道乃因皮科恩公式 (the Picone formula) 深入問題的核心。在對比下，Birkhoff–Rota [5, p.268, Theorem 3] 的證明使用多次歸謬證法乃因其證明始終滯留於膚淺的層面。Birkhoff–Rota [5, pp.266–267, §10.5] 僅使問題變複雜。故皮科恩的證明遠比伯克霍夫 (Birkhoff) 與羅塔 (Rota) 的證明直接。較直接的證明較佳。數學教科書的作者應選較佳證明編入其書。

9 結論

如今從歷史的角度來看，整部數學史可說是歸謬證法的演進史。在研究數學問題之初，群雄并起，對結論進行大膽的猜測，然後各顯神通，尋求嚴格的證明。若在證明中使用歸謬論證，通常尚可改進，使證明變得更直接。未能避免使用歸謬證法正表明仍有更深的領域亟待探測。在證明中完全地避免使用歸謬論證是數學家的最終目標。然而將論證直接化可能需走一段「難以預料地漫長」路。例如一些變分法 (the calculus of variation) 中的論證可用勒貝格積分 (the Lebesgue integration) 法直接化：用「Rudin [32, p.31, Theorem 1.39(a)] 之論證」將「Fomin–Gelfand [15, p.9, Lemma 1] 之證明」「直接化」成「Rudin [32, p.31, Theorem 1.39(b)] 之證明」。

例 9.1. (即使定理涉及選擇公理 [the axiom of choice]，照樣可使其歸謬論證變直接)
Borovkov [6, p.431, l.−6–p.432, l.−3] 用歸謬證法證

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}_n \downarrow \emptyset \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(\boldsymbol{\mathcal{B}}_n) = 0。$$

藉 Bell [3, p.4, Lemma 9; p.5 Lemma 10]，證明 Kolmogorov 擴張定理 (the Kolmogorov extension theorem) [Borovkov [6, p.431, Theorem]] 無需使用歸謬證法。使用緊緻類 (compact class) 的概念是移除此歸謬論證的主要關鍵。
註. Both Borovkov [6, p.428, Theorem 1] 與 Bell [3, pp. 1–2, Theorem 2] 均用相同的關鍵概念：外測度 (outer measure)。

參考文獻

[1] Ahlfors, L. V.: *Complex Analysis*, 2nd ed., New York: McGraw-Hill, 1966.

[2] Bell, R. J. T.: *An Elementary Treatise on Coordinate Geometry of Three Dimentions*, 3rd ed., London: Macmillan, 1963.

[3] Bell, J: http://individual.utoronto.ca/jordanbell/notes/kolmogorov.pdf

[4] Bellman, R.: *Stability Theory of Differential Equstions*, New York: McGraw-Hill, 1953.

[5] Birkhoff, G. & Rota, G. C.: *Ordinary Differential Equations*, 3rd ed., New York: John Wiley & Sons, 1978.

[6] Borovkov, A. A.: *Probability Theory* (translated from the Russian by O. Borovkova), Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 1998.

[7] Coddington E. A. & Levinson N.: *The Theory of Ordinary Differential Equations*, New York: McGraw-Hill, 1955.

[8] Collatz, L.: *Differential Equations* (translated from German by E. R. Dawson), New York: John Wiley & Sons, 1986.

[9] Courant R. & John, F: *Introduction to Calculus and Analysis*, 2 vols., New York: John Wiley & sons, vol.1 (1965), vol.2 (1974).

[10] Dugundji, J.: *Topology*, Boston: Allyn and Bacon, 1966.

[11] Edwards, H. M.: *Galois Theory*, New York: Springer-Verlag, 1984.

[12] Ellison, W. & F.: *Prime Numbers*, New York: John Wiley & Sons, 1985.

[13] Elsevier: http://www.elsevierdirect.com/companions/9780123846549/Chap_Mathieu.pdf

[14] Fine, H. B. & Thompson H. D.: *Coordinate Geometry*, New York: The Macmillan Company, 1909.

[15] Fomin, S. V. & Gelfand, I. M.: *Calculus of Variations*, translated and edited by R. A. Silverman, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1963.

[16] González, M. O.: *Complex Analysis (Selected Topics)*, New York: Marcel Dekker, 1992.

[17] Guo, D. R. & Wang, Z. X.: *Special Functions*, translated from the Chinese by D. R. Guo & X. J. Xio, Singapore: World Scientific, 1989.

[18] Hartman, P.: *Ordinary Differential Equations*, 2nd ed., Boston: Birkhäuser, 1982.

[19] Herstein, I. N.: *Topics in Algebra*, 2nd ed., Lexington: Xerox College, 1975.

[20] Ince, E. L.: *Ordinary Differential Equations*, New York: Dover, 1956.

[21] Ireland, K. & Rosen, M.: *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, 2nd ed., New York: Springer-Verlag, 1990.

[22] Jacobson, N.: *Lectures in Abstract Algebra*, 3 vols., Princeton: Van Nostrand, vol. 1 (1951), vol. 2 (1953), vol.3 (1964).

[23] Massey, W. S.:*Algebraic Topology: An Introduction*, New York: Springer-Verlag, 1989.

[24] Munkres J. R.: *Topology*, 2nd ed., Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 2000.

[25] Narasimhan R.: *Complex Analysis in One Variable*, Boston: Birhäuser, 1985.

[26] Nelson, E.: http://www.math.princeton.edu/ nelson/217/jordan.pdf

[27] Pervin, W.J.: *Foundations of General Topology*, New York, Academic Press, 1964.

[28] Pontryagin, L. S.: *Ordinary Differential Equations*, translated from the Russian by Leonas Kacinskas and Walter B. Counts, Reading: Addison-Wesley Publishing Company, 1962.

[29] Reif, F.: *Statistical Thermal Physics*, New York: McGraw-Hill, 1965.

[30] Royden, H. L.: *Real Analysis*, 2nd ed., New York: The Macmillan Company, 1968.

[31] Rudin, W.: *Principles of Mathematical Analysis*, 2nd ed., New York: McGraw- Hill, 1964.

[32] Rudin, W.: *Real and Complex Analysis*, 2nd ed., New York: McGraw-Hill, 1974.

[33] Saks, S. & Zygmund, A.: *Analytic Functions*, translated by E. J. Scott, Monografje Matematyczne, vol. 28, 3rd ed., Warsaw, 1971.

[34] Sneddon, I. N.: *Elements of Partial Differential Equations*, New York: McGraw-Hall, 1957.

[35] van der Waerden, B. L.: *Modern Algebra*, 2 vols, Translated from the German by F. Blum, New York: Ungar, 1949.

[36] Wang, L. C.: http://www.lcwangpress.com/physics/absurd-de.html

[37] Wang, L. C.: http://www.lcwangpress.com/papers/existence.pdf

[38] Watson, G. N. & Whittaker E. T.: *A Course of Modern Analysis*, 4th ed., Cambridge: Cambridge University Press, 1963.

[39] Watson, G. N.: *Theory of Bessel Functions*, 2nd ed., Cambridge: Cambridge University Press, 1966.

[40] Zygmund, A.: *Trigonometric Series*, 2 vols., 2nd ed., Cambridge: Cambridge University Press, 1959.

Mr. Li-Chung Wang is the author of the following website about the philosophy of mechanics:
http://www.lcwangpress.com/physics/main.html.
通訊處：桃園縣中壢市普義里18鄰溪洲街267巷21號7樓, Taiwan, ROC.
E-mail:lcwangpress@yahoo.com