從效能的觀點談存在性及唯一性

王立中

二〇一一年五月三十日

摘要

在第 1節中，我們從邏輯、常識及數學的觀點來討論空集的下確界。在第 2節中，我們將存在性劃分爲三類：建造存在、歸謬存在、假設存在。若可能，存在應以最有效的算法建造。超幾何方程之解可表爲級數或積分。兩種表法皆屬建造存在，但計算超幾何函數之值，以級數表法爲佳。此乃因前一算法較有效。
方法解：首先考慮一特殊類型的微分方程。若其積分解乃基於猜測、運氣、嘗試與錯誤，無法得知被積函數從何而來，僅能用代入法證其爲解，則此未開發解算不得方法解。假設同一方程亦屬範圍較廣的 Laplace 型微分方程。兩相對照，其積分解可用系統方法建造。事實上，被積函數及積分路線可用 Laplace 變換式來確定。因此，後一解較前一解有方法。
若存在之導得只需簡單手續，則稱此存在爲近存在；若存在之導得需複雜手續，則稱此存在爲遠存在，無論它是建造存在、歸謬存在、假設存在。我們將用割圓整數 (cyclotomic integers) 之質因數分解的存在性作爲建造存在的例子。在此例中，我們將揭示當除數 (divisors) 一般化爲理想 (ideals) 時，如何保存對除數可除測試的有效性。在回顧在各種條件下建造眞實或理想的質因子的整個過程後，我們發現當建立最一般化的定理作爲最後結果時，我們僅保存了效能最差的方法，而遺漏了其他在途中對特殊例子所設計的較爲有效的方法。因而理論的高潮往往只是對論題的一偏之見或過度簡化。所以數學應強調方法而非理論。建造存在的強度 (strength) 乃取決於所用的建造工具。如何改進建造的效能：降低嘗試與錯誤的層次、弄清何事能做何事不能做、儘可能減少答案中的未知成分。歸謬存在源自將不可能的情況從考慮中移除。建造存在可估計，而歸謬存在不可估計。令 $\{\alpha_i \in \mathbb{R} | i \in I\} \neq \varnothing$。則 $\sup_{i\in I} \alpha_i$ 之存在爲歸謬存在 [Rudin [36, p.11, l.−17–l.−16]]。我們無法知其在數線上的位置。而且當我們蒐集更多的元素 $\alpha_i (i \in J \subset I)$ 並找出 $\sup_{i\in J} \alpha_i$，這手續對縮小 $\sup_{i\in I} \alpha_i$ 的搜索範圍卻毫無助益。依據 Fomin–Gelfand [12, p.198, Theorem] 中的證明 [Ritz 方法]，易作其電腦模擬，然而依據 Coddington–Levinson [3, p.197, l.7–l.8] 中之命題的證明則不然。此乃因在後一證明中，每一特徵值之存在均得自歸謬論證。假設存在的來源：欲描述數學物件的一般性質需先假設其存在、由公設提供、集中注意於數學結構、爲顧及邏輯完備的權宜之計、關係式在特殊情況可用有效方法得出證明，但在一般情況不易證明，爲便於討論一般情況，我們假設關係式成立；在低層次雖無通則，但在高層次確具有趣理論。由選擇公理 (the axiom of choice) 所產生的存在爲假設存在。我們應儘可能避免使用選擇公理。在第 3節中，我們討論一般化對存在性及唯一性的影響。在第 4節中，我們討論如何有效地證明唯一性、如何將唯一性的證明精緻化、爲何唯一性會

不成立；然後探討一些與唯一性有關的問題。用能量積分證明「有關波動方程的混合題」的唯一性強而有力地支持我們用哈密爾敦量建造系統的運動方程，作爲量子力學中的一公設。在第 5節中，我們作出結論：爲增強理論的有效性，對存在性我們將採用如下的優先順序：建造存在、歸謬存在、假設存在。

關鍵詞: 建造存在、歸謬存在、假設存在、唯一性、勒貝格測度、基本上確界、數學歸納法、選擇公理、割圓整數、質因數分解、理想的素因子、割圓體的週期、質理想、可除測試、嘗試與錯誤的層次、建造存在的強度、李雅普諾夫定理、戴德金分割、柯西序列、對稱收斂、單向收斂、雙向收斂、分割收斂、可去奇點、超越數的存在性、歸謬論證的範疇、佐恩引理、極大理想、中國餘數定理、索菲·傑曼定理、陶伯定理、哈恩–巴拿赫定理、歐幾里得整環、主理想整環、戴德金環、減設精緻化、初值問題、李普希茲條件、柯西問題、狄利克雷問題、滋長條件、邊界條件、有關波動方程的混合題、系統的全能量、量子力學的公設、特徵曲面、逐步求近法、格林函數、微分不等式、優級數方法、傅立葉變換、分佈解、Ritz 方法、Sturm–Liouville 問題、直接法、有限差分法、Lagrange 乘子法、均值性、方法解

在討論存在性及唯一性之前先從邏輯、常識、數學三角度談空集之下確界。其旨在若盲目而機械式地執行邏輯運算，很容易忽略自然的方法而遺漏其重要的數學意義。

1　空集之下確界

設 $f : X \to [0, +\infty]$ 可測 (measurable)。令 $\mathbb{R}$ 爲實線且令 $S = \{\alpha \in \mathbb{R} | \ m(f^{-1}(\alpha, +\infty)) = 0\}$，其中 m 表 $\mathbb{R}$ 上的勒貝格測度 (the Lebesgue measure)。爲討論 f 之基本上確界 (Rudin [38, p.67, l.16]) 的概念，Rudin 將討論分爲兩種情況： $S \neq \varnothing$ 與 $S = \varnothing$。在第一情況，他定義 β 爲 $\inf S$。在第二情況，爲與第一情況一致，他定義 β 爲 $+\infty$，因每一實數均爲 S 之下界。後者乃由下邏輯論證推得：若存在一非 S 下界之實數 γ，則存在一個 $\alpha \in S$ 使得 $\alpha < \gamma$。但這將與 $S = \varnothing$ 相矛盾。

其次從常識觀點考慮空集之下確界。若 $S = \varnothing$，則對每一 $\alpha \in \mathbb{R}$， $m(f^{-1}(\alpha, +\infty)) > 0$。即每一個 $\alpha \in \mathbb{R}$ 皆非 f 之基本上界。因每一個 $\alpha \in \mathbb{R}$ 均不夠大到成爲 f 之基本上界，我們只有將 f 之基本上確界 β 取得大於或等於每一個 $\alpha \in \mathbb{R}$。因而 β 必須是 $+\infty$。

最後從數學觀點考慮空集之下確界。爲了考慮 f 之基本上確界，由上確界 (=最小上界) 之定義知，我們需考慮 f 之基本上界。對於 $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$，若 $f \leq \alpha$ 殆遍 (almost everywhere) 成立，則我們稱 α 是 f 之一基本上界。若 α 爲一實數，則 $f \leq \alpha$ 殆遍成立若且唯若 $m(f^{-1}(\alpha, +\infty)) = 0\}$。因而 $S \cup \{+\infty\} =$「 f 之基本上界所成集」。

現考慮實函數之基本上界的下二性質：

(a). $+\infty$ 爲每一函數之基本上界。

(b). $+\infty$ 是 f_0 唯一的基本上界，其中 $f_0 : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$

$x \ \to [x]$，其中 $[x]$ 是小於或等於 x 的最大整數。

Rudin [38, p.67, Definition 3.7] 不足以生動地描繪性質 (a) 或 (b)。Rudin 在定義基本上確界時，並未考慮 f 之基本上界的全集。由是知其全集 (universal set) 包羅不夠廣泛。若 Rudin 能自然地將 $+\infty$ 視爲 f 之一基本上界，並將其列入全集中元，他便沒必要考慮空集之下確界。

2 存在性的分類

在討論存在性的分類之前，我們先列出下面幾項指導方針，作爲研究存在性的依據：

1 我們應縮小存在性所在的範圍。設 A 爲 B 之眞子集 (proper subset) 且問題之解屬於 A，則我們說「解屬於 A」而不說「解屬於 B」。

2 我們應比較產生各種存在性的工具，這類分析有助於決定存在性的相對強度 (relative strength)。

3 我們應儘可能避免使用如數學歸納法 (mathematical induction) 及選擇公理 (the axiom of choice) 之類含無窮步驟的手續。

例 2.1. 在 Rudin [36, p.34, l.−5]中，爲證對每一 I 的開覆蓋存在一有限子覆蓋 (In Rudin [36, p.34, Theorem 2.40])，Rudin 用數學歸納法建造序列 $\{I_n\}$。兩相對照，Johnson–Kiokemeister–Wolk [25, p.147, Theorem 6.3] 的證明未用數學歸納法。

爲減少混淆及誤解，我們應將存在性至少分爲如下三類：建造存在、歸謬存在、假設存在。

2.1 建造存在

令命題 $A =$「x 具性質 P」，
命題 $B =$「x 不具性質 P」。
我們應能決定 A 或 B 的眞僞。若且爲若 A 爲眞，則 B 爲僞。
我們可用各種方法有效建造具性質 P 的一元素 x。

2.1.1 建造的有效性

2.1.1.1 建造對資源

數學資源比邏輯資源豐富；物理資源比數學資源豐富。假如我們被允許用較豐富的資源，則建造存在會變得較有效。譬如用電荷測試電場的存在並量其大小。此法與第 2節，指導方針 1 一致。

Karamcheti [27, p.166, l.−5–l.−1] 以笨拙的方式說明動力學解的存在性比運度學解的存在性有效。

2.1.1.2 若可能，存在應以最有效的算法建造。超幾何方程之解可表爲級數或積分

超幾何方程之解可表爲級數或積分。兩種表法皆屬建造存在，但計算超幾何函數之值，以級數表法爲佳。此乃因前一算法較有效：令 $u(z) = \int_0^1 F(z,t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z,t)(z-z_0)^n$。假設欲在 $z = z_0$ 之鄰域上計算 $u(z)$ 之值。若選積分表法，則須對每一點 z_k 用 Riemann 和來趨近積分。這樣將重覆無限過程許多次。兩相對照，若選級數表法，則無

限過程只須使用一次。此乃因級數適用於整個鄰域。此即爲何用 Stirling 公式 [Watson–Whittaker [45, p.279, l.4]] 而不用 Watson–Whittaker [45, p.243, l.3] 中之定義來計算 gamma 函數的原因。

Lebedev [29, §9.5] 說明在區域 $T\{z : |z| < 1\}$ 中，其中 T Lebedev [29, p.246, l.−14] 中之線性變換，如何將超幾何函數表成級數。Lebedev [29, §9.7] 用 L'Hospital 規則及 Lebedev [29, p.3, (1.2.2)] 討論 Lebedev [29, §9.5] 所遺漏的例外情況。

註 1. Watson–Whittaker [45, p.288, l.3] 對超幾何函數的解析延拓提供一明確公式。Lebedev [29, p.240, l.−18–p.241, l.6] 供給一更初等的方法執行解析延拓。若以計算超幾何函數之值爲目的，則後一方法較有效。此乃因只需在較局限的區域 $\Re\gamma > \Re\beta > 0, |\arg(1-z)| < \pi$ 將積分表爲級數。

註 2. Lebedev [29, p.256, (9.7.3)] 可證明如下：

證明. 情況 $0 \le k < n$： $\frac{\partial}{\partial\gamma}[\Gamma(1+\alpha+\beta-\gamma+k)]^{-1}|_{\gamma=\alpha+\beta+n} = (-1)^{n-k}(n-k-1)!$ [Lebedev [29, p.3, (1.2.2)]]。

情況 $k \ge n$： $\frac{\partial}{\partial\gamma}[\Gamma(1+\alpha+\beta-\gamma+k)]^{-1}|_{\gamma=\alpha+\beta+n} = \frac{\psi(1-n+k)}{\Gamma(1-n+k)}$。 □

2.1.1.3 方法解

$W_{k,m}(z) = -\frac{1}{2\pi i}\Gamma(k+\frac{1}{2}-m)e^{-z/2}z^k\int_{\infty}^{(0+)}(-t)^{-k-1/2+m}(1+\frac{t}{z})^{k-1/2+m}e^{-t}dt$ [Watson–Whittaker [45, p.339, l.−13–l.−12]] 得自 Watson–Whittaker [45, p.292, l.−15–l.−10] 及 Guo–Wang [15, p.95, l.−8]。

註. (方法解 [methodical solutions]) Watson–Whittaker [45, p.291, l.−11–l.−7] 中之微分方程屬特殊型。所予解僅以代入法證其適當 [Watson–Whittaker [45, p.292, l.−15–l.−10]]。我們不得知被積函數從何而來。像 Watson–Whittaker [45, p.339, l.−13–l.−12] 這種基於猜測、運氣、嘗試與錯誤的未開發解算不得方法解。兩相對照， Guo–Wang [15, p.305, l.10–l.19; §6.4] 中之積分解是以系統方法建造的，而此法適用於範圍較廣的 Laplace 型微分方程 [Guo–Wang [15, §2.13]]。事實上，被積函數及積分路線 [Guo–Wang [15, p.302, l.4–l.13]] 可用 Laplace 變換式來確定。因此，後一解較前一解有方法。

2.1.1.4 建造的演化過程

我們藉下二步驟建造割圓整數 (cyclotomic integers) 之質因子分解的存在性：

2.1.1.4.1 步驟 1：將普通質數分解爲理想的質因數

令 λ 爲普通質數且令 α 滿足 $\alpha^\lambda = 1$。給予割圓整數 (Edwards [10, p.81, l.−8]) 所成環，欲找出質割圓整數 (Edwards [10, p.84, l.24])。

問題 1. 對因數分解應從何下手？

解. 因普通質數爲將普通整數質因數分解的基本單位，故現應將普通質數 p 作進一步分解成割圓整數內的質因數 (即能除 p 的質割圓整數；我們稱它們爲 p 之實際質

因數)。我們先假設其存在，然後經由分析找出必要條件：Edwards [10, p.90, l.-3–p.91, l.4] 中的定理及 Edwards [10, p.92, l.-12–l.-7]中的定理。在 $p \equiv 1 \bmod \lambda$ 的情況下，我們可根據這些必要條件綜合建立一有效方法 (Edwards [10, p.92, l.-3–l.-1]) 找出質割圓整數且其範數 (norm) 爲 p。Lamé 用 Edwards [10, p.92, l.-3–l.-1] 中的定裡找出一些質割圓整數，如 Edwards [10, p.99, Table 4.4.1] 所示。 □

問題 2. 對於 $\lambda = 7$ 的情況，我們卻無法用 Lamé 的方法分解 29 (Edwards [10, p.99, l.-20–l.-13])。然分解 29 需何種技巧呢？

解. Kummer 發現找「滿足 Edwards [10, p.91, l.2] 中之條件的一些 k 」的技巧 (Edwards [10, p.99, l.-9])。然後他成功得到 29 的質因數 $\alpha^2 - \alpha^4 + 1$。Kummer 注意到在 $\lambda = 23$ 的情況，47 在割圓整數中無質因數 (Edwards [10, p.105, l.23]) 並且積 $47 \cdot 139$ 有兩種「分解成不可約割圓整數」的方法 (Edwards [10, p.105, l.-1–p.106, l.4])。在 $\lambda = 13, \gamma = 2$, 且 $e = 4$的情況，若用長度 f 爲 3 的週期 (Edwards [10, p.108, l.-11])，則計算範數的工作可縮減成三行 (Edwards [10, p.104, l.10–l.12])。長度爲 f 的週期是經 σ^e 不變的割圓整數 (Edwards [10, p.108, l.17–l.19])。 □

註. 現參閱 van der Waerden [42, vol. 1, §54]。我們發現 van der Waeden 未能說明週期在找「質割圓整數」中所扮演的角色。

問題 3. 當 $p = \lambda$ 或 $p \equiv 1 \bmod \lambda$ 時，我們已知如何對 p 作質因數分解。但當 $p \not\equiv 1 \bmod \lambda$ 時，應如何對 p 作質因數分解呢？

解. 設 p 滿足 $p \not\equiv 1 \bmod \lambda$ 且可被假設的質割圓整數 $h(\alpha)$ 整除。則 ($g(\alpha) \equiv$ 一普通整數 u mod $h(\alpha)$) $\Rightarrow$ ($g(\alpha)$ 由長度爲 f 的週期組成) (Edwards [10, p.112, l.1–l.2; l.10–l.11])。Kummer 證明前一命題之逆亦成立 (Edwards [10, p.112, l.-13–l.-12])。這顯示週期的概念在 $p \not\equiv 1 \bmod \lambda$ 的情況扮演更重要的角色。現經由分析可給出質割圓整數滿足的強必要條件，如 Edwards [10, p.113, l.18–l.27] 所示。然後剩下的工作是證明 Edwards [10, p.113, l.-11–l.-9] 中的綜合命題。對於 $\lambda = 5$ 且 $p = 29$ 的情況，用嘗試與錯誤的方法所建之表 (Edwards [10, p.115, Table 4.7.1]) 幫助不多。若能找出 Edwards [10, p.112, Theorem] 中的整數 u_0 與 u_1 則更有利；其中障礙可藉「縮減 e 元 e 個同餘式爲單元單一同餘式 (Edwards [10, p.115, l.-11; p.118, l.1–l.10])」而超越。 □

註. 在發展理論的過程中，我們應注意模式的重現與演變。Edwards [10, p.112, l.-14] 中的同餘式 $\eta_i \equiv u_i \bmod h(\alpha)$ 與 Edwards [10, p.90, l.-1–p.91, l.1] 中的同餘式 $\alpha \equiv k \bmod h(\alpha)$ 相似。參見問題 2 之解。

問題 4. 對於 $\lambda = 31$ 且 $p = 2$的情況，我們只能證明 2 無「因數由長度爲 5 之週期所組成」的因數分解。這是因爲我們僅對週期有可除測試 (Edwards [10, p.112, l.-16–l.-12; p.113, l.-11–l.-9])。如何擴展此可除測試使其對所有割圓整數均適用？

解. Kummer 建立 Edwards [10, p.123, l.−20–l.−9] 中的定理及其推論而解決此難題。 □

問題 5. 爲應用 Edwards [10, p.123, Corollary] 中的可除測試，我們必須找出整數 $u_1, u_2, \cdots, u_e$。然而整數 $u_1, u_2, \cdots, u_e$ 的存在性需要假設 p 須有一割圓整數爲其質因數。在問題 2 之解中，我們知道在 $\lambda = 23$ 的情況， 47 無割圓整數爲其質因數。我們應如何擴展可除測試到「p 無割圓整數爲其質因數」的情況？

解. 第一、建造 $\psi(\eta)$ 與 u_i $(i = 1, \cdots, e)$ 使得 $\eta_i\psi(\eta) \equiv u_i\psi(\eta) \bmod p$ (Edwards [10, p.129, l.22])。第二、定義以「對應於 $u_1, u_2, \cdots, u_e$ 的『p 之理想質因數』」爲模 (modulo) 的同餘式，如 Edwards [10, p.130, l.1–l.2] 所示。此同餘式爲質同餘式 (Edwards [10, p.127, l.2])。p 之理想質因數恰有 e 個；一割圓整數 $g(\alpha)$ 可被 p 除若且唯若 $g(\alpha)$ 可被「 p 之所有 e 個理想質因數」除 (Edwards [10, p.128, Theorem 2])。 □

註. 我們稱 Edwards [10, pp.136–137, Definition] 中的質因數爲一理想質因數。將割圓整數分解爲理想質因數的問題基本上已解決。Edwards [10, p.128, l.9–l.11; p.135, l.−11–l.−10; p.136, l.−4] 提供此種理想分解的存在性。Edwards [10, p.138, Corollary] 提供此種分解的唯一性。在問題 2 之解中，我們注意在 $\lambda = 23$ 的情況， 47 無實際割圓整數爲其質因數。現在 47 可被分解爲 22 個理想質因數。139 亦同。所有這些 44 個理想質因數均非實際質因數。$1 - \alpha + \alpha^{21}$ 可表爲「47 的一理想質因數」與「139 的一理想質因數」之積(Edwards [10, p.105, l.12; l.−19–l.−15])。以 Edwards [10, p.141, l.−12] 中的記號表示得
$1 - \alpha + \alpha^{21} = (47, 1 - \alpha + \alpha^{21})(139, 1 - \alpha + \alpha^{21})$。這解釋了爲何將 $47 \cdot 139$ 分解爲不可約割圓整數有兩種方法。

問題 6. 如何以割圓整數表示 p 之理想質因數？

解. 任一除數均可表爲 Edwards [10, p.141, l.−12]中的形式。 □

討論：

(1) 確保勿將因數分解得超過需要

在普通質因數分解中，普通質數扮演分子的角色。將割圓整數分解爲理想的質因數好比進一步將分子分裂爲原子。在分解後須確保理想分解與實際分解相一致，且此分解並不過分：設 $g(\alpha)$ 、 $h(\alpha)$ 均爲割圓整數。若割圓整數 $g(\alpha)$ 具理想因數 $h(\alpha)$，即 $g(\alpha)$ 可被 $h(\alpha)$ 理想地整除 (Edwards [10, p.139, l.22])，則存在一割圓整數 $k(\alpha)$ 使得 $g(\alpha) = h(\alpha)k(\alpha)$。即須確保商 $k(\alpha)$ 是整個的而非分數的割圓整數。這就是 Edwards [10, p.137, the fundamental theorem] 的內容。參見 Edwards [10, p.139, l.−13–l.−12]。其證明可藉澄清下列諸命題的意義而完成：當 Edwards 說就普通意義言，$g(\alpha)$ 可被 p 除 (Edwards [10, p.128, l.9–l.10])，其意乃指存在一割圓整數 $h(\alpha)$ 使得 $g(\alpha) = p\,h(\alpha)$。這也澄清了 Edwards [10, p.138, l.2–l.3] 中命題「$h(\alpha)$ 可被 p 除」的意義。因此，當 Edwards [10, p.139, l.−13] 說：「$g(\alpha)$ 可被 $h(\alpha)$ 除」，其意乃指存在一割圓整數 $k(\alpha)$ 使得 $h(\alpha) = k(\alpha)g(\alpha)$。

(2) 解答較複雜的問題需要下較大的功夫及用較精緻的策略

如同超越障礙，解答問題需要花功夫及嘗試新策略。問題 $(i+1)$ 之解比問題 i 之解花更多工夫，故問題 $(i+1)$ 之解比問題 i 之解複雜，但前者的效能較差。問題 $(i+1)$ 之解法能解「問題 i 之解法所不能解的問題」，故問題 $(i+1)$ 之解法比問題 i 之解法精緻。若「以 p 之實際質因數爲模」的同餘關係成立，則 Edwards [10, p.128, l.7] 中 e 個質同餘關係中之一亦成立。參見 Edwards [10, p.126, l.11–l.12]。故對應於 $u_1, u_2, \cdots, u_e$ 的「p 之理想質因數」比「p 之理實際因數」弱且一般化。若問題 i 之解與問題 j 之解均可解答問題 i，其中 $j > i$，我們在解問題 i時，應選問題 i 之解而不選問題 j 之解，因後者的效能較差。

2.1.1.4.2 步驟 2：將割圓整數分解爲質理想

欲將上述方法應用到其他類型的代數整數 (Edwards [10, p.144, l.−3])，我們應將理想質因數 (ideal prime divisors) 的概念推廣成質理想 (prime ideals) 的概念。

(1) 我們試圖認同理想因數 (divisors; Edwards [10, p.139, l.14–l.15]) 與理想 (ideals; Edwards [10, p.144, l.19–l.−8])兩概念。

爲定義理想之間的除法，我們先研究「主理想之間的除法」的特徵：$p|q$ 若且唯若 $\langle q\rangle \subseteq \langle p\rangle$。第一法：定義 $A|B$ 若且唯若 $B \subseteq A$ (Stewart–Tall [41, p.121, Proposition 5.6]) 看來似乎自然且無害。然而若採用此法，將會使我們實際失去所有關於割圓整數的有效可除測試。這是因爲我們無有效的算法可用來檢驗是否 B 中每一元均在 A 中。對於保存可除測試的有效性，我們沒必要考慮所有的理想；僅需考慮所有的質理想。第二法：所有要做的是認同理想質因數與質理想，然後依照 Edwards [10, §4.12] 中的方案定義理想之間的除法。當理想因數爲理想取代時，第二法容許我們保存「關於理想因數之間可除測試」的有效性。

註. 對割圓整數，我們有如下對除數的有效可除測試：Edwards [10, p.90, Theorem] (對在 $p \equiv 1 \bmod \lambda$ 的情況下的實際質因數) $\longrightarrow$ Edwards [10, p.121, l.−12–l.−8; p.123, Theorem and its Corollary] (對在 $p \not\equiv 1 \bmod \lambda$ 的情況下的實際質因數) $\longrightarrow$ Edwards [10, p.126, Proposition] (對理想質因數) $\longrightarrow$ Edwards [10, p.139, l.22] (對理想因數)。

(2) 我們試圖將 2.1.1.3.1 中的理想質因數分解翻譯成近世體論的語言。

根據 Edwards [10, p.122, l.5] 中 $P(X)$ 的建造法，$\mathbb{Q}[X]$ 中不可約多項式 (irreducible polynomial) $X^{p-1}+X^{p-2}+\cdots+X+1$ 可表爲 $P(X)$ [例如 $\alpha^3-\eta_0\alpha^2+\eta_2\alpha-1$ (Edwards [10, p.122, l.10])] 及其在 $\mathbb{Q}[\eta_0][X]$ 中的諸共軛元 (conjugates) 之積。$P(X)$ 是以 α 爲其根 (Edwards [10, p.122, l.5]) 且佈於 $\mathbb{Q}[\eta_0]$ [一佈於 $\mathbb{Q}$的正規擴張體 (normal extension; van der Waerden [42, vol.1, p.164, l.6; p.160, l.1–l.2])] 的 f 次不可約 (van der Waerden [42, vol.1, p.165, l.−13; p.97; l.−6–l.−5]) 多項式。由 Edwards [10, p.127, l.4; p.146, Theorem] 與 Stewart–Tall [41, p.187, l.14–l.15] 知 $\bar{P}(X)$ (例如 $X^3 - u_0X^2 + u_2X - 1$) 不可約 mod$p$，其中 $\bar{P}(X)$ (Stewart–Tall [41, p.186, l.8]) 乃藉「將 $P(X)$ 中形如 $g(\eta)$ 的係數代以形如 $g(u)$ 的係數」而得。我們可用伽羅瓦理論作更複雜且結構化的解釋，但那將離題分心，難以看清論題主旨。

註 1. van der Waerden [42, vol.1, chap. V, §32] 中 $\varphi(X)$ 的建造與 Stewart–Tall [41, p.187, l.−3–p.188, l.3] 中 $\bar{f}$ 的因式分解效能均差。兩相對照，「$\alpha^3 - \eta_0\alpha^2 +$

$\eta_2\alpha - 1$ (Edwards [10, p.122, l.−13–l.−12]) 與 u_i (Edwards [10, p.120, l.1–l.7]) 之獲得」效能均佳。

註 2. 對割圓整數的情況， Stewart–Tall [41, p.186, l.8] 中的 $e_1, \cdots, e_r$ 均爲 1 (van der Waerden [42, vol.1, p.120, l.4–l.19 or p.124, l.14–l.15])。

討論：定理通常只能過分簡化地摘要敘述討論中的各種方法

建造含 $\langle p\rangle$ 的質理想比建造 p 的實際質因數複雜且前者的效能較差。

近世代數的教科書常藉列出 Kummer 所建的定理來強調其成就。事實上，唯一分解定理的概念從自然數中比從割圓整數中容易獲得。而且 Kummer 的方法在某些情況 (Edwards [10, p.116, l.13]) 可產生強分解形式(即質割圓整數之積)，然而其唯一分解定理 (Stewart–Tall [41, p.186, Theorem 10.1; p.117, Theorem 5.5]) 僅能產生弱分解形式(即質理想之積)。事實上，即使對簡單情況 $N(\alpha-1)=5$ (Edwards [10, p.92, l.−10–l.−9; p.93, l.1])，Stewart–Tall [41, p.186, Theorem 10.1] 也不足以產生強分解形式。因此在學 Kummer 的理論時，應集中注意於他所遭遇的障礙以及其用來解決問題的方法。用問題與解答引導的理論自然變得有條理；用其他方法建造的理論只會變得不自然且雜亂無章。

在數學上，理論是方法的副產品。在特殊的情況下，我們可有更有效的方法。爲包括所有情況，Stewart–Tall [41, p.186, Theorem 10.1] 僅能出示效能最差的方法。因而 Stewart–Tall [41, p.186, Theorem 10.1] 僅是過分簡化地摘要敘述 Edwards [10, chap. 4] 中的各種方法。應用理論來解實際問題通常不如直接用「發展該理論所用方法」來得有效。因此，在數學上，我們應強調方法而非理論。

在偏微分方程的理論中，我們也遇到類似的情況：Sneddon [40, p.50, Theorem 2] $\longrightarrow$ Petrovsky [33, pp.15–16, the Cauchy–Kowalewski Theorem] $\longrightarrow$ Rudin [37, p.195, Theorem 8.5 (基本解的存在性；the existence of a fundamental solution)]。第一定理提供封閉型式的解。第二定理用優級數方法 (the method of majorants) 得到級數解。第三定理用傅立葉變換 (Fourier transforms) 得到分佈解 (distribution solutions)。若試圖解更一般化的偏微分方程，則所用方法的效能會變得較差。注意分佈的微分運算比連續可微函數 (continuously differentiable function) 的微分運算弱 (Rudin [37, p.136, l.13–l.26])。也注意 Rudin [37, p.197, l.13] 中使用選擇公理 (the axiom of choice; Rudin [37, p.58, l.3; p.57, l.11–l.13])。若我們僅討論古典解或分佈解，而未能包括所有解法，則該討論不完全。

2.1.1.5 如何改進建造的效能

2.1.1.5.1 儘可能降低嘗試與錯誤的所在層次

當我們以有限步驟建造數學元素時，我們應儘可能降低嘗試與錯誤的所在層次。這樣可協助我們追溯根源，洞察內部的結構，引起動機，並以更明確有效的方式來建造該數學元素。

例 2.2. 我們在割圓整數環 (Edwards [10, p.81, l.−8]) 內用下列步驟建造質因數 (Edwards [10, p.106, l.−8–l.−7])：

層次 1. 定義質因子：用 Edwards [10, p. 126, Proposition] 找一組整數 $u_1, u_2, \cdots, u_e$。

層次 2. 用 Edwards [10, p. 125, Exercise 3] 將多項式 $X^{\lambda-1}+X^{\lambda-2}+\cdots+X+1$ 分解爲不可約多項式 mod$p$。參見 2.1.1.3.2, (2)。

層次 3. 用 Stewart–Tall [41, p.186, Theorem 10.1] 找出 $\langle p\rangle$ 的質理想。參見 2.1.1.3.2, 註。

對於層次 1，若 p 有一質因數爲割圓整數，我們可將有比 Edwards [10, p.126, Proposition] 所用嘗試與錯誤更有效 (Edwards [10, p.126, l.4–l.5]) 的方法去找 $u_1, u_2, \cdots, u_e$。參見 Edwards [10, p.118, l.17; p.120, l.5]。Stewart 省略層次 1而在層次 2 中採用嘗試與錯誤的方法 (Stewart–Tall [41, p.187, l.−3–p.188, l.3])。這樣的作法將使割圓體週期 (van der Waerden [42, vol.1, p.165, l.−8]) 的特性 (Edwards [10, p. 125, Exercise 3]) 無法在 Stewart 的陳述中顯示出來。所以上述的省略在某種意義上抹殺了如下的建造動機：根據 p 的實際(割圓整數)質因數的特性來創造理想質因數。參見 Edwards [10, p.127, l.12–l.14]。

2.1.1.5.2 對何事能做與何事不能做應區分清楚

子曰：「知之爲知之，不知爲不知，是知也。」孔子對「眞知」有深切的體認。在數學中，對何事能做與何事不能做須區分清楚。下面的例子便犯了「分辨不清能不能做」的錯誤。

例 2.3. (極大解) (Maximal solutions; Hartman [18, p.25, Lemma 2.1])

在 Coddington–Levinson [3, p.46, l.5] 中所定義之 Φ 有問題。這是由於我們會碰到某一初值問題，只知它的一些解而不知其所有解。在此情況下，我們只能找出一些解的上確界，卻無法得到所有解的上確界。也許有人會辯護説這缺失可經由證明 $\Phi=\lim_{m\to\infty}\varphi_{1/m}$ (Coddington–Levinson [3, p.47, l.2–l.3]) 而補正。其實不然；我們無法得到 $\varphi_{1/m}$ 。這是因爲 φ_ϵ 藉著 φ_i $(i=0,1,\ldots,n-1)$ 來定義，諸 φ_i 又藉著 Φ 來定義，而 Φ 卻不可達。正如下棋，「一著不愼，滿盤皆輸」。 Hartman [18, p.25, (2.4)] 中的建造可使我們避免考慮所有解的問題。

2.1.1.5.3 儘可能消除答案中的未知成分

有效建造是將資源的利用發揮到極致，而一般化的論證正巧相反：欲用最少的假設得到相同的結論。

定理 2.1. (李雅普諾夫定理) (Lyapunov's theorem; Coddington–Levinson [3, p.314, l.-10–p.315, l.21])

註 1. Coddington–Levinson [3, p.315, l.16] 所提出的問題可在 Wikipedia [47, §Integral form for continuous functions, (b)] 中找到解答。

註 2. Coddington–Levinson [3, p.315, (1.4)] 中的 σ 可取爲 Coddington–Levinson [3, p.315, (1.5)] 中的 μ。參見 Coddington–Levinson [3, p.316, l.3–l.4]。在對照下，我們卻無法有效建造 Pontryagin [35, p.211, l.−11] 中的 α。假使我們追溯它的建造 (Pontryagin [35, p.210, l.13; p.208, l.2; p.206, l.4–l.5])，我們將發現它的存在性是由歸謬證法所導出 (Rudin [36, p.31, l.12–l.16])。 Pontryagin [35, p.208, Theorem 19] 的證明模式與 Hartman [18, p.40, Theorem 8.4] 相同；因後一定理較爲一般化，故其得出的

常數通常效能較差。Pontryagin [35, p.208, Theorem 19] 的證明另有缺點。那就是 Pontryagin [35, p.207, (20)] 中的 W 取決於 ψ_i，而 ψ_i 又取決於 Pontryagin [35, p.206, (16)]。換言之，Pontryagin [35, p.206, (13)] 中的 μ 與 ν，從而 Pontryagin [35, p.210, l.14] 中的 α 均取決於 Pontryagin [35, p.206, (16)]。所以欲決定 Pontryagin [35, p.210, l.14] 中的 α，我們必須先解微分方程：Pontryagin [35, p.206, (16)]。但我們的目標是無需詳解微分方程即可決定其解之穩定性。

2.1.1.5.4 當前往目標時，不應添加不必要的結構

例 2.4. (有效建造)

建造的目標決定該用的建法。當前往目標時，不應添加不必要的結構。此法「容許我們容易認出建造的每一部分所扮演的角色(例如 Landau [28, p.78, Definition 54] 與 Landau [28, p.53, Definition 35] 一致)」且有助於透視無理數的內部構造。例如當推廣正有理數集至正實數集時，我們的目標是確保下述命題的成立：設 S 爲一正實數集；若 S 有上界，則 S 有最小上界。

因而上述問題基本上是一有關次序 (ordering) 或正向 (positiveness) 的問題。所以在選工具建造無理數時，取戴德金分割 (Dedekind's cuts; Landau [28, p.43, Definition 28]) 比取柯西序列 (Cauchy sequences; van der Waerden [42, vol.1, p.212, l.−18]) 合適。柯西序列是爲「度量空間的完全性」(completion of a metric space) 而非「無理數的建造」所設計的工具。換言之，它是爲拓撲擴張而非代數擴張所設計的工具。事實上，唯有將不必要的複雜化諸如負數、拓撲、度量空間、無限小等概念從實數中游離出去，我們方能抓牢正無理數 (Landau [28, p.67, Definition 42]) 的要義。由 Landau [28, p.9, Definition 2] 看來，van der Waerden [42, vol.1, p.209, l.2] 中所述「次序非代數概念」並不正確。

2.1.1.6 建造存在的強度

建造存在的強度取決於用來產生存在性的工具。若類型 I 的收斂 $\Rightarrow$ 類型 II 的收斂，則我們說類型 I 的收斂比類型 II 的收斂強。當我們說一非正常積分 (improper integral) 存在，乃指積分收斂到某極限。積分值的「存在強度」取決於用作「估計積分方法」的「收斂強度」。當求積分時，我們不僅應計算其值，還得指出「能以最強的方式收斂到該值」的積分類型。

(1) 絕對收斂比普通收斂強。

Ahlfors [1, p.154, Example 2] 中積分的絕對收斂可用 González [14, p.689, l.12] 中的條件證明。

(2) 非對稱(普通)收斂比對稱收斂 (González [14, p.686, l.1]) 強。

用半圓僅能證 González [14, p.693, (9.11-11)] 中積分的對稱收斂，然而用矩形卻能證 González [14, p.695, (9.11-15)] 中積分的非對稱收斂。Ahlfors [1, p.156, Fig. 25] 用來證 Ahlfors [1, p.157, l.4] 中極限的非對稱收斂，而 González [14, p.698, Fig. 9.16] 用來證 González [14, p.698, (9.11-21)] 中積分的對稱收斂。

(3) 單向收斂 ($\lim_{R\to\infty}\int_{[0,R]}$) 比雙向收斂 ($\lim_{\epsilon\to 0+,R\to\infty}\int_{[\epsilon,R]}$) 強。

Ahlfors 用可去奇點 (removable singularity) 的概念找出 Ahlfors [1, p.157, l.−11]

中 $\lim_{R\to\infty}\int_{[0,R]}(\sin x)x^{-1}dx$ 的值。兩相對照，González 僅找出 González [14, p.703, (9.11-28)] 中 $\lim_{\epsilon\to 0+,R\to\infty}\int_{[\epsilon,R]}(\sin x)x^{-1}dx$ 的值。

(4) 非分割收斂比分割收斂 (González [14, p.686, 2.(c)]) 強。
Ahlfors 找出 Ahlfors [1, p.157, l.15] 中 $\lim_{M\to-\infty,N\to\infty}\int_{[M,N]}(\sin x)x^{-1}dx$ 的值，然而 González 僅找出 González [14, p.703, (9.11-27)] 中 $\lim_{\epsilon\to 0+,R\to\infty}(\int_{[-R,-\epsilon]}+\int_{[\epsilon,R]})(\sin x)x^{-1}dx$ 的值。

註. (慢收斂對快收斂) 若二數列收斂於同一數且第二數列可用較少項達到指定精確度，則我們說第二數列比第一數列收斂得快。例：Guo–Wang [15, p. 13, l.1–p. 13, l.−5]。

2.2 歸謬存在

有兩種解題法：第一、探究可能性如利用資源建造解答；第二、排除不可能如使用歸謬證法。後一解法的手續如下：若假設 $\{x\,|x$ 具性質 $P\}=\varnothing$，我們將得矛盾。因而具性質 P 的 x 之存在性純爲邏輯上的結論。將命題「每一個 x 均無性質 P」否定會使 x 的存在變得不確定 (就維恩圖 [the Venn diagram] 而言，我們僅能找出其所在範圍，但無法確定其所在位置) 且無法提供一有效方法找出具性質 P 的特殊元。對所予特定元，有時因資訊不足甚至無法決定它是否具性質 P。所以歸謬存在比建造存在弱。

例 2.5.
室內有三人，但僅有二座位，故有一人無座位。

例 2.6. (用 Cantor 的論證證明超越數的存在性) (Hardy–Wright [17, p.160, Theorem 190])

例 2.7.
設已知 Coddington–Levinson [3, p.194, l.1–l.2]，欲找出 Ince [20, p.233, Theorem II] 與「Coddington–Levinson [3, p.197, l.7–l.8] 中之命題」基本上的不同；並找出前者之證明較佳的原因。

(1) 前一證明：

  (a) 預備知識：Ince [20, p.229, l.16–l.25]
  (b) 找 μ_0 (Ince [20, p.233, l.15])，然後找 λ_0 (Ince [20, p.233, l.26–l.27])。
  (c) 已知 μ_m (Ince [20, p.232, l.1–l.13])，我們用 Ince [20, p.232, l.14–l.33] 找 $\lambda_{m+1}\in(\mu_m,\mu_{m+1})$。
  (d) 特徵根的存在性是直覺的且基本上是建造的；此證明並提供根數的資訊。

(2) 後一證明：

  (a) 爲了建造格林函數 G (Coddington–Levinson [3, p.193, l.11])，從而 $\mathcal{G}$ (Coddington–Levinson [3, p.193, l.15])，我們須假設 $l=0$ 非特徵根 (Coddington–Levinson [3, p.193, l.4])。由 Coddington–Levinson [3, p.189, Theorem 2.1] 知此事可行 (Coddington–Levinson [3, p.193, l.5–l.9])。然而非特徵根之存在性乃得自歸謬證法。

(b) 由 Coddington–Levinson [3, p.196, l.14] 知僅考慮 $(0, ||\mathcal{G}||)$ 中的「$\mathcal{G}$ 之特徵根」並不失一般性。

(c) Rudin [36, p.11, Theorem 1.36] 的證明用歸謬證法證明上確界的存在性。由上確界之定義知 Coddington–Levinson [3, p.195, l.−12] 中 $u_m \in C$ 的存在性得自歸謬證法。

(d) 由 Coddington–Levinson [3, p.196, l.−7] 知 $|\mu_m|$ 遞減至 0。由 Coddington–Levinson [3, p.194, l.1–l.2] 知此與 Coddington–Levinson [3, p.189, Theorem 2.1] 一致。

(e) 特徵根的存在性非建造的；此證明未提供根數的資訊。

對用歸謬證法得到的存在，我們應儘可能地減縮歸謬論證所涉及的範圍。

例 2.8.
Niven–Zuckerman [31, p.144, Theorem 5.6] 的論證比 Hua [19, p.208, Theorem 7.8] 好，因 Niven 將歸謬論證的範圍從自然數集減縮至質數集 (Niven–Zuckerman [31, p.143, Theorem 5.5; p.142, Theorem 5.3])。

減縮歸謬論證的範圍有助於更精確地找解。

例 2.9.
Niven–Zuckerman [31, p.224, Theorem 8.6] 的證明 Hua [19, p.76, Theorem 4.3] 好，因前一證明將不定集從 $(n, +\infty)$ 減縮為 $(n, 2n)$，其中 n 是大於 1 的正整數。

例 2.10. (可估計對不可估計)
González [13, p.639, l.−5] 中 M 之存在屬歸謬存在。參見 Rudin [36, p.11, Theorem 1.36; p.31, Theorem 2.28; p.35, Theorem 2.41] 之證明。因此，M 不可估計。兩相對照，Guo–Wang [15, p.151, l.2–l.3] 中 M 之存在屬建造存在。故 M 可估計。

例 2.11. (Ritz 方法是研究 Sturm–Liouville 問題的有效工具 [Fomin–Gelfand [12, pp.198–205, §41]])
I. 求函數極值的微積分工具： Kaplan [26, §2.19; §2.20]。
求泛函極值的變分學工具：直接法 [direct methods] (Rayleigh–Ritz 方法；有限差分法 [the method of finite differences]) 及應用 Euler 方程 [Courant–Hilbert [7, vol.1, chap. IV, §2]]。
II. 用 Ritz 方法有效地 [Fomin–Gelfand [12, pp.196–197, Remark 2]] 解 Sturm–Liouville 問題 [Fomin–Gelfand [12, p.196, Theorem]]：如同 Fomin–Gelfand [12, p.195, (8)] 建造一完全的函數序列 φ_n；此序列允許我們將求泛函 $J[y]$ 極小值的問題簡化為求 n 變數 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 之函數 $J[\alpha_1\varphi_1 + \cdots + \alpha_n\varphi_n]$ 極小值的問題 [Fomin–Gelfand [12, p.195, (10)]]。故僅需用求函數極值的微積分工具來計算 Fomin–Gelfand [12, p.196, l.13–l.14] 中之 y_n。
III. Fomin–Gelfand [12, p.200, (24)] 中 $\lambda^{(1)}$ 之存在性比 Coddington–Levinson [3, p.195, l.−9] 中 μ_0 之存在性更可造且更有效。

說明. (A).
1. 用微積分可計算如 Fomin–Gelfand [12, p.199, l.5] 所定義之M。
2. 對一系統解，可將其函數 (不可數) 形式 $y(x)$ 簡化為形如 Fomin–Gelfand [12, p.199,

(18)] 之序列 (可數) 形式 α_k。於是 $J[y]$ 被轉換爲 $J(\alpha_1\varphi_1+\cdots+\alpha_n\varphi_n)$，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的二次形式。我們可用 Kaplan [26, §2.19; §2.20] 中之方法計算後者之極小值。
3. 依 Fomin–Gelfand [12, p.199, l.−10–l.−7] 定義 $\lambda_n^{(1)}, y_n^{(1)} \quad (n=1,2,\cdots)$。則 $\lambda_{n+1}^{(1)} \le \lambda_n^{(1)}$ [Fomin–Gelfand [12, p.200, (23)]]。依 Fomin–Gelfand [12, p.200, (24)] 定義 $\lambda^{(1)}$。在得到 $\lambda_1^{(1)},\cdots,\lambda_m^{(1)}$ 之後，我們知 $\lambda^{(1)}$ 在 $\lambda_m^{(1)}$ 與 $\{\lambda_n^{(1)}\}$ 的下界之間。故在過程進行中，$\lambda^{(1)}$ 的可能範圍逐漸縮小。在 Fomin–Gelfand [12, p.201, l.−14–p.203, l.−3] 之中，我們用 Lagrange 乘子法 [the method of Lagrange multipliers] 得到 Fomin–Gelfand [12, p.203, (36)]，然後用 Fomin–Gelfand [12, p.201, Lemma 2] 證明 Fomin–Gelfand [12, p.202, (32)]。
(B). 兩相對照，$\mu_0=\sup_{\|u\|=1}|(\mathcal{G}u,u)| \quad (u\in C$ 在 $[a,b]$ 上定義) [Coddington–Levinson [3, p.195, l.2; l.−9]]。此上確界之存在爲歸謬存在 [Rudin [36, p.11, l.−17–l.−16]]。我們無法知其在數線上的位置。而且當我們蒐集指標集中更多的元素 $(u\in I)$ 並找出 $\sup\{(\mathcal{G}u,u)|u\in I\}$，這手續對縮小最終上確界的搜索範圍卻毫無助益。
註. 根據 (A)，我們極易寫出找 $\lambda^{(1)}$ 的電腦程式。然而 (B) 中的想法對寫出找 μ_0 的電腦程式毫無助益。數學家應將比 Coddington–Levinson [3, p.194, l.−6–p.197, l.8] 更有效的內容放進數學教科書中。
IV. 由 III 知可用 Lagrange 乘子法有效計算出 $\lambda^{(1)},\lambda^{(2)},\cdots;\ y^{(1)},y^{(2)},\cdots$ [Fomin–Gelfand [12, §41.4)]]，而 Coddington–Levinson [3, p.195, l.−9–p.196, l.−2] 中 $\mu_k \quad (k=0,1,2,\cdots)$ 的存在性得自 $(k+1)$-層歸謬論證。而且證明找 $\mu_0,\mu_1,\cdots$ 的過程可繼續源自歸謬證法 [Coddington–Levinson [3, p.197, l.1–l.7]]，而建造 $\lambda^{(1)},\lambda^{(2)},\cdots$ 的過程可繼續乃因過程中每一步驟均滿足 Lagrange 乘子法的條件。 □

2.3 假設存在

假設存在通常用於下諸情況：

(1) 欲描述數學物件的一般性質需先假設其存在。

例 2.12. (和之極限等於極限之和)
在 Rudin [36, p.43, Theorem 3.3(a)] 中，$\lim_{n\to\infty}(s_n+t_n)$ 的存在性得自 s 與 t 均存在的假設。

(2) 假設存在乃由廣泛接受爲眞的公設所提供。
在此情況，存在性未經證明，純由公設假設。換言之，我們僅根據假設將公設的邏輯值定爲眞。例如許多數學家相信並假設選擇公理爲眞。這種作法有助於拓展研究至需用選擇公理的論題。存在的影像雖可能會變模糊，由此公設導出的結果卻有助於達成擴張、統一、完全等目標。
McCoy [30, p.458, Lemma 17.38] 的證明用到與選擇公理等價 (Dugundji [9, pp.31–32, Theorem 2.1]) 的佐恩引理 (Zorn's lemma)。依筆者管見，雖然 Stewart–Tall [41, p.86, Proposition 4.5 (b) ⇒ (c)] 的證明未用選擇公理，但其論證提供有關「建造極大理想」的資訊比 McCoy [30, p.458, Lemma 17.38] 少。因而假設存在不一定比歸謬存在差。

(3) 當數學理論的重點在其結構而不在其方法的有效性時，我們採用假設存在。.

例 2.13. (拓撲的存在性) (Pervin [32, p.36, l.−2–p.37, l.5])

(4) 我們採用假設存在，因其僅出現於過渡時期。

有時假設存在是爲避免麻煩的權宜選擇。我們用 Ellison–Ellison [11, p.258, Theorem 8.4] (參見 Ellison–Ellison [11, p.277, l.16]) 證明 Ellison–Ellison [11, p.277, Theorem 8.8(b)]。Ellison–Ellison [11, p.258, Theorem 8.4(a)] 的證明分爲二情況：當情況 (i) (Ellison–Ellison [11, p.258, l.−2]) 時，$c(\epsilon)$ 存在；當情況 (ii) (Ellison–Ellison [11, p.258, l.−1]) 時，$c(\epsilon, k_0, \beta_0)$ 存在。

因我們不知 β (Ellison–Ellison [11, p.258, l.−9]) 是否存在，爲邏輯上的完全，我們可假設其存在。即使「假設 β 存在」不至於影響 Ellison–Ellison [11, p.277, Theorem 8.8(b)] 的成立，但它確實會影響 A_1 (Ellison–Ellison [11, p.278, l.7]) 與 $c(\epsilon)$ (Ellison–Ellison [11, p.258, l.11]) 的有效性。

(5) 假設所需關係僅於若干特殊情況具有效方法建造，但在一般情況下卻難以找到有效的建造方法。然而在假設該關係存在後，我們便可在一般情況下發展出一套有趣理論。因此，欲討論理論的發展就必須先假設「該關係存在」。

例 2.14.

假設我們想知道 Edwards [10, p.147, Chinese Remainder Theorem] 的論證是否適用於交換環 (Ireland–Rosen [21, p.181, Proposition 12.3.1])。於是我們在 Ireland–Rosen [21, p.181, Proposition 12.3.1] 中假設 $A_i + A_j = R$。即 Ireland–Rosen [21, p.181, l.−10] 中 u_1 與 v_1 的存在性來自命題假設。在 $\mathbb{Z}[e^{2\pi i/\lambda}]$ 的情況，「用最少的嘗試與錯誤且有限步驟來建造 u_1 與 v_1」需以冗長的篇幅解釋 (See Edwards [10, pp.147–149])。然而在一般情況下我們無法模擬上述有效方法。即實際上，在一般情況下 u_1 與 v_1 的來路不明。假設 $A_i + A_j = R$ 成立可使我們應用該等式而無需知其來源，局限上下文於合理的篇幅，並集中注意於論證模式。

例 2.15.

Edwards [10, p.62, Theorem] ($p = 2 \times 5 + 1$)
$\longrightarrow$ Edwards [10, p.63, Theorem] (在許多情況下 $p = 2n + 1$ 爲質數)
$\longrightarrow$ Edwards [10, p.64, 索菲·傑曼定理 (Sophie Germain's theorem)] (p 之存在爲假設的)。

例 2.16. (Ince [20, p.197, l.−15–l.−8])

2.3.1 用選擇公理產生的存在

有時雖然不確定某函數是否存在，但我們用公設假設其存在。有些人認爲這樣便可填補理論的漏洞。另有一些人認爲引用不可靠的公設會使理論變得不完美；但就瞭解的困難度而言，若堅持引用同一不可靠的公設，即使引用多次，我們仍將停留在第一層地獄。這些均爲衡量理論品質的錯誤觀念。依筆者管見，作者每一次引用同一不可靠的公設將會使我們墜入下一層地獄。例如引用此一公設三次會使我們墜入「比第二層糟」的第三層地獄。若作者在其理論中濫用同一不可靠公設，那將會使我們在地獄中直線下墜，萬劫不復。若一函數能可用精確的公式建造，我們就不該用公設去假設它成立。最好的辦法

是將引用一不可靠公設的次數減至最少。這是「Weiner 的關於一般陶伯定理 (the general Tauberian theorem; Wiener [46, p.74, (10.04)], Rudin [37, p.211, Theorem 9.7(a)]) 的原始證明 (Wiener [46, p.75, l.−15–p.97, l.7]) 清楚且有價值而其他人的證明則否」的原因。此乃因其他人引用了哈恩–巴拿赫定理 (the Hahn–Banach theorem; Rudin [37, p.59, Theorem 3.5])。參見 Rudin [37, p.212, l.11; p.211, l.13 & l.8]。Rudin [37, p.59, Theorem 3.5] 的證明引用了選擇公理 (Rudin [37, p.59, l.−12; l.13; l.1; p.57, l.11–l.18])。

Dugundji [9] 在第一章中 (Dugundji [9, p.21, l.16–l.17]) 介紹選擇公理，而 Hall–Spencer [16] 在最後一章中 (Hall–Spencer [16, chap. 7]) 介紹同一公理。因選擇公理會降低理論的品質，我們應將在證明中「無需引用選擇公理的定理」與「需要引用選擇公理的定理」區分爲兩類。Dugundji 的安排使讀者難以辨別 Dugundji [9] 中之定理屬於那一類，特別是接近書尾的定理。兩相對照，Hall–Spencer [16] 將涉及選擇公理的定理全部局限在最後一章。爲便於讀者辨認類別，Hall–Spencer [16] 做了較佳選擇。

2.4 近存在對遠存在

若存在之導得只需簡單手續，則稱此存在爲近存在；若存在之導得需複雜手續，則稱此存在爲遠存在，無論它是建造存在、歸謬存在、假設存在。

例 2.17.

Ince [20, p.207, l.26–l.28] 中所述決定 $Ax = b$ 可解的法則僅需簡單計算，而 Coddington–Levinson [3, p.294, l.14–l.15] 中所述決定 $Ax = b$ 可解的法則需複雜手續。試比較下二證明。

第一法則的充分條件之證明. $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) \Rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix} = \sum_1^M c_i \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{Mi} \end{pmatrix}$，其中 $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{Mi} \end{pmatrix} = (A)e_i$。 □

第二法則的充分條件之證明. 設 A 爲一 $m \times n$ 矩陣且 $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$。則 $A^* : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$。

$A^* u = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{m1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^m u_i \overline{a_{ij}} = 0 \quad (j = 1, \cdots, n)$

$\Leftrightarrow (u, \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}) = 0 \quad (j = 1, \cdots, n)$。

因而 (A^* 之零空間) $= (A\mathbb{C}^n)^\perp$，其中 $\perp$ 意指 $\mathbb{C}^m$ 上的內積。

由假設知 $b \in (A^*$ 之零空間$)^\perp = ((A\mathbb{C}^n)^\perp)^\perp$

$= A\mathbb{C}^n$ [Jacobson [22, vol. 2, p.151, l.17]]。故

$\exists x \in \mathbb{C}^n : b = Ax$。 □

3 一般化如何影響存在性與唯一性

較一般化的定理揭示較少特徵。例如下述四命題均討論質因數分解的存在性與唯一性：

(1) Van der Waerden [42, vol.1, p.61, l.18–l.20]：歐幾里得整環 (Euclidean domain)。

(2) Jacobson [22, vol.1, p.122, Theorem 2]：主理想整環 (principal ideal domain)。

(3) Stewart–Tall [41, p.186, Theorem 10.1]：由單元生成的整數環 (the ring of integers is generated by a single element)。

(4) Stewart–Tall [41, p.117, Theorem 5.5]：戴德金環 (Dedekind ring; Stewart–Tall [41, p.116, l.17])。

對於 1 與 2，讓我們僅考慮「由單元生成的整數環」的情況。若所有理想均爲主理想，則 3 降縮爲 2。因此，每一命題均爲前一命題的推廣。

3.1 一般化如何影響唯一性

讓我們考慮質因數分解的唯一性。從 1 至 4，每一命題的唯一性證明可用來證前一命題的唯一性。換言之，由一命題的唯一性可導出前一命題的唯一性，即使每一命題的唯一性可有「根據本身特徵而非根據較一般化命題的特徵」的證明。例如 van der Waerden [42, vol.1, p.60, l.−3–p.61, l.17] 證 2 中唯一性；Ribenboim [34, p.268, l.18] 證 3 中唯一性。

3.2 反例

滿足 4 中條件但非 3 中條件的例子：Stewart–Tall [41, §2.6, Example 2(b)]。
滿足 3 中條件但非 2 中條件的例子：Stewart–Tall [41, p.111, l.1–p.112, l.11; p.113, l.12–l.−1]。

這些例子提供了一些關於「如何質因數分解」的寶貴構想 (Stewart–Tall [41, p.112, l.12–l.23; p.113, l.1–l.8])。

註. 就唯一質因數分解而言，命題 2 是介於元素與理想 (Stewart–Tall [41, p.110, l.−1]) 之間的分界線：由 1 至 2，我們發現主理想整環是容許唯一質因數分解的最弱整環 [即唯一分解整環 (Stewart–Tall [41, p.96, l.17]) 必須是主理想整環] (Stewart–Tall [41, p.132, Theorem 5.15])；由 4 至 2，我們發現唯一分解是普遍現象 (即對所有理想均成立) 並且命題 2 僅碰巧爲「所有理想均爲主理想 (即理想變成元素)」的特例。

滿足 2 中條件但非 1 中條件的例子：$\mathbb{Z}(\sqrt{d})$，其中 $d = -19, -43, -67, -163$ (Stewart–Tall [41, p.93, l.10; p.101, Theorem 4.18; p.132, Theorem 5.15])。

3.3 一般化如何影響存在性

從 4 至 1，存在性的建造變得更爲明確且有效，此乃因有較多的工具及資源可供利用。事實上，命題 (i) 揭示了命題 $(i+1)$ 未能揭示的額外特徵 $(i = 1, 2, 3)$。例如 3 認出 p 之諸質理想因子互爲共軛。Stewart–Tall [41, p.117, Theorem 5.5] 的證明在 Stewart–Tall [41, p.117, l.−4] 中引用選擇公理 (參見 Dugundji [9, p.31, Theorem 2.1] 及「McCoy [30, p. 454, Theorem 17.32] 的證明」)，而 Stewart–Tall [41, p.186, Theorem 10.1] 的證明未引用效能差的選擇公理。
註. 依筆者管見，對於滿足 Stewart–Tall [41, p.117, Theorem 5.5] 中條件的特殊情況，若能找到比選擇公理更有效的方法證明唯一分解，我們就應保存這些證明，因有效方法無法爲效能差的方法所取代。

4 唯一性

4.1 如何將唯一性的證明精緻化

我們用減弱假設的方法將定理精緻化。若定理 A 與定理 B 的結論相同且定理 A 之假設比定理 B 弱，則我們說定理 A 的最有效證明比定理 B 的最有效證明精緻。我們可用定理 A 之任一證明證定理 B 即使它並不一定是證明定理 B 的最有效方法。若假設經修改後可用於更廣的類型，則我們可認爲該假設已減弱。藉減弱定理的假設，我們可精確指出導致結論的主因。欲知詳情，參見 Wang [44, §4]。

在下序列關於一般李普希茲條件 (generalized Lipschitz conditions) 的唯一性定理中，每一定理比位於其前的諸定理精緻：

(1) Coddington–Levinson [3, p.10, Theorem 2.2]

(2) Coddington–Levinson [3, pp.48–49, Theorem 2.1]

(3) Coddington–Levinson [3, p.49, Theorem 2.2]

(4) Coddington–Levinson [3, p.51, Theorem 2.3]

註 1. Coddington–Levinson [3, p.49, l.13–l.20; p.51, l.−12–l.−5]

註 2. 定理愈精緻，其證明的效能愈差。在證明精緻定理時，可能會常用歸謬證法。

註 3. Jackson [23, p.37, l.−13–p.38, l.7] 與 Conway [6, p.255, Corollary 1.9] 均證明 Dirichlet 問題之解的唯一性 [Sneddon [39, p.151, l.−9]]。前一證明用 Green 第一恆等式 [Jackson [23, p.36, (1.34)]]，而後一證明用均值性 [mean value property, Conway [6, p.253, Definition 1.5]]。然而前一證明可用來同時證明 Neumann 問題之解的唯一性。

4.2 如何找更有效的方法證明同一唯一性定理

爲有效證明一定理，我們應充分利用資源。當引用定理時，若定理的特殊情況適用，我們便不應引用定理的一般情況。其因如下：第一、這樣的引用乃根據需要定製，藉建立更密切的關係以縮小「欲證定理」與「被引用定理」之間的差距。第二、這方法可協助我們專注目標。第三、這方法可使我們熟悉欲證定理的背景；環境特徵有助於啓發新證明策略。引用定理如同選購衣服：引用一般情況如同選擇衣服的厚度；引用特殊情況如同選擇衣服的厚度及大小。對定理的環境特徵知道得愈多，我們對定理的瞭解也就更爲深刻。第四、解題貴在過程而非最後的答案。

例 4.1. (初值問題 [the initial value problem $x' = f(t,x)$，其中 f 滿足李普希茲條件 (the Lipschitz condition)] 的唯一性定理)
下列諸證明乃根據論證的有效性排其次序：

(1) Coddington–Levinson [3, p.10, Theorem 2.2] 得自 Coddington–Levinson [3, p.8, (2.2)；$\epsilon = 0$ 的情況]。

(2) Birkhoff–Rota [2, p.142, Theorem 1] 得自 Birkhoff–Rota [2, p.24, Lemma 2]。
注意 Birkhoff–Rota [2, p.24, Lemma 2] 爲 Coddington–Levinson [3, p.8, (2.2)；$\epsilon = 0$ 的情況] 之推廣。

(3) Collatz [5, chap. I, §6, Sec.19]
優點：可推廣到 n-維向量空間。
缺點：用到歸謬證法。

(4) Ince [20, p.65, l.17–p.66, l.7]; Hartman [18, p.9, l.−5–p.10, l.2]
缺點：上二段引文均不必要地用了數學歸納法。

(5) Pontryagin [35, p.157, l.11–p.158, l.−7]
評論：若將其與 1 或 2 比較，我們發現它除了添加不必要的「拓撲的機械裝置」外，並無新想法。拓撲學僅在說明數學結構時有用。

4.3 唯一性的充分條件

柯西問題 (Cauchy's problem) 之解的冪級數係數爲 Petrovsky [33, p.18, (9.2) & (14,2)] 唯一決定。參見 Petrovsky [33, p.18, l.−2–p.20, l.20]。因此，柯西問題之解唯一。在狄利克雷問題 (Dirichlet's problem; John [24, p.95, l.9–l.10]) 中，由邊界條件 (boundary conditions) 可導出唯一性 (John [24, p.95, l.7])。關於熱方程 (the heat equation; John [24, p.217, (1.36a)])，由初值與滋長條件 (initial and growth conditions) 可導出唯一性。John [24, pp.215–217, three theorems] 說明初值與滋長條件能由邊界條件發展而得。在 John [24, p.139, l.−3–p.140, l.−14] 中，能量積分被用來證明「有關波動方程的混合題」的唯一性。此觀察強而有力地支持我們用哈密爾敦量 (Hamiltonian) 建造系統的運動方程，作爲量子力學中的一公設 (Cohen-Tannoudji–Diu–Laloë [4, vol. 1, p.222, Sixth postulate])。

4.4 爲何柯西問題之解未能保持唯一性

例 4.2.

(1) 假設未能滿足李普希茲條件 (Ince [20, p.66, l.−10–l.−8; p.67, l.1–l.21]; Birkhoff–Rota [2, p.23, l.1–l.2])。

(2) 假設未能滿足滋長條件 (John [24, p.217, l.12–l.15])。

(3) 柯西資料 (Cauchy data; John [24, p.245]) 位於「在其內初值條件決定唯一解」的錐外 (Petrovsky [33, p.76, l.−9–p.77, l.8])。Petrovsky [33, p.76, l.−9–p.77, l.8] 中的例子提供了建造一族柯西問題解的系統方法。

(4) 特徵曲面 (characteristic surfaces) 妨礙了將「一般柯西問題」轉爲「標準柯西問題」的座標變換 (Petrovsky [33, p.29, l.22–l.24; p.30, l.17–p.31, l.2])。

4.5 將李普希茲條件一般化時，如何保存逐步求近法的收斂性

參見 Coddington–Levinson [3, p.54, Theorem 3.1]。

4.6 如何強化唯一性的論證

(1) 容許包含更多解。
解析函數 (Analytic functions; Petrovsky [33, p.20, l.18–l.20]) $\longrightarrow$ 非解析函數 (non-analytic functions; Petrovsky [33, p.34, §4])。

(2) 減弱「確保唯一性」的條件。
滋長條件 (John [24, p.217, (1.36c)]) $\longrightarrow$ 單側條件 (the unilateral condition; John [24, p.222, (1.57c)]). 參見 John [24, p.222, l.9–l.14]。

(3) 用一般性質而不用特殊性質。
Petrovsky [33, p.75, §11] 說明我們可用格林定理 (Green's theorem) 證明波動方程之解的唯一性。由知 John [24, p.129, (1.14)] 不必走那麼遠。

4.7 由唯一性所衍生出的推廣

(1) 微分不等式之積分：Hartman [18, p.24, Exercise 1.1] $\longrightarrow$ Hartman [18, p.24, Theorem 1.1] $\longrightarrow$ Wikipedia [47, §Integral form for continuous functions, (a) 與 (b)]。

(2) 解之絕對值的上界與下界：Hartman [18, p.27, Corollary 4.3]。

5 結論

爲增進理論中方法的有效性，在大多數情況下我們對存在性的選取應依據如下的優先順序：建造存在、歸謬存在、假設存在。

根據上述指導方針，Hardy–Wright [17, p.162, Theorem 192] 比 Hardy–Wright [17, p.160, Theorem 190] 好。歸謬存在通常在「無建造存在的一般公式可供利用」的一般情況中使用。例如爲展示理論，我們在 Davenport [8, p.117, l.9 & l.−10] 中用歸謬存在，但在用數字表示的例子 (Davenport [8, p.118, l.−12–p.119, l.17]) 裡，我們用建造存在代替歸謬存在。

在 Davenport [8, p.120, l.17–l.19] 中，Davenport 說：「建造通常比『僅證明存在』較令人滿意，雖然二者之間並無明確的分界線。」例如建造存在與歸謬存在的差異取決於「在該特例中歸謬存在所涉及的不定性」的「範圍大小」。若此不定候選集僅含一元，則兩概念相同；否則兩者不同。另一例：由選擇公理所產生的存在是假設存在，但也可視爲廣義的建造存在。參見 2.3 (1)。即使存在可能會落在兩類的交疊部分，此混淆且複雜的天性不應阻礙我們研究其起源及本質，也不應誤導我們對各類存在不加區分。

參考文獻

[1] Ahlfors, L. V.: *Complex Analysis*, 2nd ed., New York: McGraw-Hill, 1966.

[2] Birkhoff, G. & Rota, G. C.: *Ordinary Differential Equations*, 3rd ed., New York: John Wiley and Sons, 1978.

[3] Coddington E. A. & Levinson N.: *The Theory of Ordinary Differential Equations*, New York: McGraw-Hill, 1955.

[4] Cohen-Tannoudji, C., Diu, B. & Laloë, F.: *Quantum Mechanics*, 2 vols, New York: John Wiley & Sons, 1977.

[5] Collatz, L.: *Differential Equations*, translated from German by E. R. Dawson, New York: John Wiley & Sons, 1986.

[6] Conway, J. B.: *Functions of One Complex Variable*, 2nd ed., New York: Springer-Verlag, 1978.

[7] Courant R. & Hilbert D.: *Methods of Mathematical Physics*, 1st English ed., 2 vols., New York: Interscience Publishers, vol.1 (1953), vol.2 (1962).

[8] Davenport, H.: *The Higher Arithmetic*, 5th ed., Cambridge: Cambridge University Press, 1982.

[9] Dugundji, J.: *Topology*, Boston: Allyn and Bacon, 1966.

[10] Edwards, H. M.: *Fermat's Last Theorem (A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory)*, New York: Spring-Verlag, 1977.

[11] Ellison, W. & F.: *Prime Numbers*, New York: John Wiley & Sons, 1985.

[12] Fomin, S. V. & Gelfand, I. M.: *Calculus of Variations*, translated and edited by R. A. Silverman, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1963.

[13] González, M. O.: *Classical Complex Analysis*, New York: Marcel Dekker, 1992.

[14] González, M. O.: *Complex Analysis (Selected Topics)*, New York: Marcel Dekker, 1992.

[15] Guo, D. R. & Wang, Z. X.: *Special Functions*, translated from the Chinese by D. R. Guo & X. J. Xio, Singapore: World Scientific, 1989.

[16] Hall, D. W. & Spencer II, G. L.: *Elementary Topology*, New York: John Wiley & Sons, 1955.

[17] Hardy, G.H. & Wright, E.H.: *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th ed., Oxford: Clarendon Press, 1979.

[18] Hartman, P.: *Ordinary Differential Equations*, 2nd ed., Boston: Birkhäuser, 1982.

[19] Hua, L.K.: *Introduction to Number Theory*, Translated from the Chinese by Peter Shiu, New York: Springer-Verlag, 1982.

[20] Ince, E. L.: *Ordinary Differential Equations*, New York: Dover, 1956.

[21] Ireland, K. & Rosen, M.:*A Classical Introduction to Modern Number Theory*, 2nd ed., New York: Springer-verlag, 1990.

[22] Jacobson, N.: *Lectures in Abstract Algebra*, vol.1, Princeton: Van Nostrand, 1951.

[23] Jackson, J. D.: *Classical Electrodynamics*, 3rd ed., New York: John Wiley, 1999.

[24] John F.: *Partial Differential Equation*, 4th ed., New York: Springer-Verlag, 1982.

[25] Johnson, R.E., Kiokemeister F.L., and Wolk, E.S.: *Calculus*, New York: 2nd ed., Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1971.

[26] Kaplan W.: *Advanced Calculus*, 5th ed., New York: Addison-Wesley, 2002.

[27] Karamcheti, K.: *Vector Analysis And Cartesian Tensors With Selected Applications*, San Francisco: Holden-Day, 1967.

[28] Landau, E. G. H.: *Foundations of Analysis*, translated from the German by F. Steinhardt, New York: Chelsea Publishing Company, 1951.

[29] Lebedev, N.N.: *Special Functions and Their Applications*, translated from the Russian by R. A. Silverman, Englewood Cliffs, N.J.: Prectice-Hall, 1965.

[30] McCoy, N. H.: *Fundamentals of Abstract Algebra*, Boston: Allyn and Bacon, 1972.

[31] Niven, I. & Zuckerman, H.S.: *An Introduction to the Theory of Numbers*, 4th ed., New York: John Wiley & Sons, 1980.

[32] Pervin, W.J.: *Foundations of General Topology*, New York, Academic Press, 1964.

[33] Petrovsky, I. G.: *Lectures on Partial Differential Equations*, (translated from Russian by A. Shenitzer), 1st English ed., New York: Interscience Publishers, 1954.

[34] Ribenboim, P: *Algebraic Numbers*, New York: Wiley-Interscience, 1972.

[35] Pontryagin, L. S.: *Ordinary Differential Equations*, translated from the Russian by Leonas Kacinskas and Walter B. Counts, Reading: Addison-Wesley Publishing Company, 1962.

[36] Rudin, W.: *Principles of Mathematical Analysis*, 2nd ed., New York: McGraw-Hill, 1964.

[37] Rudin, W.: *Functional Analysis*, New York: McGraw-Hill, 1973.

[38] Rudin, W.: *Real and Complex Analysis*, 2nd ed., New York: McGraw-Hill, 1974.

[39] Sneddon, I. N.: *Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry*, New York: Interscience Publishers, 1956.

[40] Sneddon, I. N.: *Elements of Partial Differential Equations*, New York: McGraw-Hill, 1957.

[41] Stewart, I. & Tall, D.: *Algebraic Number Theory*, 2nd ed., London: Chapman and Hall, 1987.

[42] van der Waerden, B. L.: *Modern Algebra*, 2 vols, Translated from the German by F. Blum, New York: Ungar, 1949.

[43] Wang, L. C.: `http://www.lcwangpress.com/physics/exist-de.htm`

[44] Wang, L. C.: `http://www.lcwangpress.com/papers/cmethod.pdf`

[45] Watson, G. N. & Whittaker E. T.: *A Course of Modern Analysis*, 4th ed., Cambridge: Cambridge University Press, 1963.

[46] Wiener, N.: *The Fourier Integral and Certain of Its Applications*, New York: Dover Publications, 1951.

[47] Wikipedia: *Gronwall's inequality*, `http://en.wikipedia.org/wiki/Gronwall'sinequality`

Mr. Li-Chung Wang is the author of the following website about the philosophy of mechanics: http://www.lcwangpress.com/physics/main.html.
通訊處：桃園縣中壢市普義里18鄰溪洲街267巷21號7樓, Taiwan, ROC.
E-mail:lcwangpress@yahoo.com