數學歸納法

王立中

二〇一三年二月十一日

摘要

第一、注意採用數學歸納法的證明能指出其關鍵步驟；其起步有助於從千絲萬縷中理出頭緒。第二、採用數學歸納法的證明令人較易專注問題的核心；相形之下，不用數學歸納法將使證明顯得冗贅雜亂。第三、選用降階公式積分有助於掃除障礙、自動歸零。第四、討論數學歸納法的嵌層。第五、討論使用數學歸納法的藝術。使用數學歸納法如同管理火車：欲節省開支，減少班次並增加車廂載重；欲增快其速，減少車廂載重。同樣的平衡車廂載重理念適用於數學歸納法的有效運用。第六、討論求和及數學歸納法的限度。

關鍵詞: 數學歸納法、嵌層、如何有效地使用數學歸納法、Peano 存在性定理、基數、格、Ascoli 引理、Plana 求和公式

1 採用數學歸納法的證明能指出其關鍵步驟

例 1.1. (Gegenbauer 對於 Poisson 積分的一般化)

Watson [7, p.50, l.11–l.18] 中有關 Watson [7, p.50, (3)] 的證明須預知 Watson–Whittaker [6, §15.8] 中的內容。在 Watson–Whittaker [6, §15.8] 中複雜的公式堆裡找關鍵步驟實不容易。兩相對照，下述採用數學歸納法的證明能顯示其關鍵步驟：遞歸公式
$(n+1)C_{n+1}^{\nu}(t) = 2(\nu+n)tC_n^{\nu} - (1-t^2)\frac{dC_n^{\nu}(t)}{dt}$。

證明. 當 $n=0$ 時，Watson [7, p.50, (3)] 降爲 Watson [7, p.48, (4)]。
$\frac{(-i)^{n+1}\Gamma(2\nu)(n+1)!(\frac{z}{2})^{\nu}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(2\nu+n+1)}\int_{-1}^{1} e^{izt}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}C_{n+1}^{\nu}(t)dt$
$= \frac{(-i)^{n+1}\Gamma(2\nu)n!(\frac{z}{2})^{\nu}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(2\nu+n)}\int_{-1}^{1} e^{izt}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}tC_n^{\nu}(t)dt$
$- \frac{(-i)^{n+1}\Gamma(2\nu)n!(\frac{z}{2})^{\nu}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(2\nu+n+1)}\int_{-1}^{1} e^{izt}(1-t^2)^{(\nu+1)-\frac{1}{2}}\frac{dC_{n+1}^{\nu}(t)}{dt}dt$ [Watson [7, p.50, l.−9]]
$= -J'_{\nu+n}(z) + \frac{(\nu+n)J_{\nu+n}}{z}$ [Watson–Whittaker [6, p.330, l.3, the first equation]；歸納法假設]
$= J_{\nu+n+1}$ [Watson [7, p.45, (1) & (2)]]。 □

註. 若欲從公設開始證明一複雜定理，常感茫然無緒或不勝其煩。尤其是當讀者依此類證明推演時，常不易抓住其重點。好的開始是成功的一半。數學歸納法中的始步常能提供如此的適當起點。

2 採用數學歸納法的證明令人較易專注問題的核心

例 2.1. (Plana 求和公式)

Watson–Whittaker [6, p.145, l.−8–l.−3] 與 Guo–Wang [2, p.118, l.2–p.119, l.13] 均證明了 Plana 求和公式。前一證明顯得冗贅雜亂。兩相對照，後一證明令人較易專注問題的核心，此乃因其採用數學歸納法。

3 選用數學歸納法有助於掃除障礙、自動歸零

降階公式建立能簡化積分形式的遞歸關係。遞歸關係與歸納步驟作用相同。若證明採取不用降階公式的大躍進，有可能遭遇困難。此乃因跳得太遠將難以預測後果、掌握先機。

例 3.1. (Stokes 公式)
$-\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}\theta\ln\sin\theta d\theta=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\{\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})\}$ [Watson [7, p.70, l.8]]。

未用降階公式的複雜證明.
令 $u=\ln\sin\theta$ 且 $dv=\cos^{2n}\theta d\theta$。則
$v=\int\cos^{2n}\theta d\theta=\frac{\cos^{2n-1}\theta\sin\theta}{2n}+\frac{2n-1}{2n}(\frac{\cos^{2n-3}\theta\sin\theta}{2n-2}+\frac{2n-3}{2n-2}(\cdots+\frac{3}{4}(\int\cos^2\theta d\theta)\cdots))$
$=\frac{\cos^{2n-1}\theta\sin\theta}{2n}+\frac{2n-1}{2n}(\frac{\cos^{2n-3}\theta\sin\theta}{2n-2}+\frac{2n-3}{2n-2}(\cdots+\frac{3}{4}(\frac{\theta}{2}+\frac{\sin\theta\cos\theta}{2})\cdots))$。
$\int vdu=\int(\frac{\cos^{2n}\theta}{2n}+\frac{2n-1}{2n}(\frac{\cos^{2n-2}\theta}{2n-2}+\frac{2n-3}{2n-2}(\cdots+\frac{3}{4}(\frac{\theta\cot\theta}{2}+\frac{\cos^2\theta}{2})d\theta\cdots)))$。
$\frac{1}{2n}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}\theta d\theta=\frac{1}{2n}\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}\frac{1}{n}$。
$\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{2n-2}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n-2}\theta d\theta=\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{2n-2}\frac{1\cdot3\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdots(2n-2)}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}\frac{1}{n-1}$。
$\vdots$
$\frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta=\frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}\frac{1}{1}$。
$\int_0^{\pi/2}\theta\cot\theta d\theta=\theta\ln\sin\theta|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\ln\sin\theta d\theta=\frac{\pi}{2}\ln 2$。
$\int_0^{\pi/2}vdu=\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}\{\frac{\pi}{4}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{1})+\frac{\pi}{2}\ln 2\}$
$=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\{\frac{\pi}{4}(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})+\frac{\pi}{2}\ln 2\}$。 □

使用降階公式的簡易證明.
令 $u=\cos^{2n-1}\theta\ln\sin\theta$ 且 $du=\cos\theta d\theta$。則
$v=\sin\theta$ 且 $du=\cos^{2n-1}\theta\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-(2n-1)\cos^{2n-2}\theta\sin\theta\ln\sin\theta$。

$\int vdu = \int(\cos^{2n}\theta - (2n-1)\cos^{2n-2}\theta\ln\sin\theta + (2n-1)\cos^{2n}\theta\ln\sin\theta)d\theta$。
$\int udv = uv - \int vdu$。
$\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}\theta\ln\sin\theta d\theta = \frac{2n-1}{2n}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n-2}\theta\ln\sin\theta d\theta - \frac{1}{2n}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}\theta d\theta$。
$-\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}\theta\ln\sin\theta d\theta = \frac{2n-1}{2n}(-\int_0^{\pi/2}\cos^{2n-2}\theta\ln\sin\theta d\theta) + \frac{1}{2n}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}\theta d\theta$。
繼續如此可直接獲得 $-\int_0^{\pi/2}\ln\sin\theta d\theta$。 □

註. 在第一證明中，必須考慮 $\int\cos^{2n}\theta d\theta$ 與 $\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}\theta d\theta$。兩相對照，在第二證明中只需考慮 $\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}\theta d\theta$。第一證明中的紅色部分爲困難部分。它於第二證明中消失。注意第一證明的大躍進僅能用於 $\int\cos^{2n}\theta d\theta$ 以致與 $\ln\sin\theta$ 脫節。

4 計數數學歸納法的嵌層

假設一數學歸納法之歸納步驟中未含其他數學歸納法，則稱該歸納步驟爲 1-層歸納步驟且該數學歸納法爲 1-層歸納法。假設 $(n-1)$-level 歸納步驟及 $(n-1)$-層歸納法已定義。若一數學歸納法之主要歸納步驟恰含 $(n-1)$-層歸納法，則稱該主要歸納步驟爲n-層歸納步驟且原來的數學歸納法爲 n-層歸納法。

例 4.1. (非唯一性的最壞情況)
Hartman [3, pp.18–23, §5] 用 4-層歸納法建造一例。
4-層歸納法：對 n 作無限歸納步驟 [Hartman [3, p.18, l.17]]。
3-層歸納法：對 k 作無限歸納步驟 [Hartman [3, p.18, l.16]]。
2-層歸納法：當 $n=0$ 時，對 i 作無限歸納步驟 [Hartman [3, p.18, (5.2)]]；當 $n+1$ $(n\geq 0)$ 時，對 j 作無限歸納步驟 [Hartman [3, p.20, l.11]]。
1-層歸納法：當 $n+1$ $(n\geq 0)$ 時，對 i 作有限 (m) 歸納步驟 [Hartman [3, p.20, (5.15)]]。
. [Hartman [3, p.21, (5.21)]] 中指數 $n+1$ 應以 n 代之。

註 1. Hartman [3, p.21, (5.21)] 中等式應以
$v_i(t) = u_i(t)\sin^2 2^n\pi(t-c) + u_{i+1}\cos^2 2^n\pi(t-c)$ 代之。

註 2. Hartman [3, p.21, (5.24)] 中等式應以
$v_i'(t) = u_i'(t)\sin^2 2^n\pi(t-c) + u_{i+1}'\cos^2 2^n\pi(t-c) + 2^n\pi(u_i - u_{i+1})\sin^2 2^{n+1}\pi(t-c)$ 代之。

註 3. Hartman [3, p.21, (5.25)] 中二等式應以
$|v_i'| \leq M_n + 2^n\pi\frac{d_n}{m}, |v_i''| \leq M_n + (2^{n+1} + 2^{2n+1}\pi)\pi\frac{d_n}{m}$ 代之。

註 4. Hartman [3, p.21, l.12–l.13] 中二等式應以
$v_i - u_i = (u_{i+1} - u_i)\cos^2 2^n\pi(t-c)$,
$v_i - u_{i+1} = (u_i - u_{i+1})\sin^2 2^n\pi(t-c)$ 代之。

註 5. Hartman [3, p.21, (5.26)] 中第二不等式應以
$|v_i - u_h| \leq (1 + 2^n\pi)\frac{d_n}{m}$ 代之。

註 6. Hartman [3, p.21, (5.27)] 中不等式應以
$(2^{n+1}+2^{2n+1}\pi)\pi\frac{d_n}{m}<\frac{\varepsilon_{n+1}}{3}$ 代之。

例 4.2. (格)
n-層歸納法可用來定義 n-維格 $\{(k_1,\cdots,k_n)|k_i\in\mathbb{N},1\le i\le n\}$；$\aleph_0$-層歸納法可用來定義 $\aleph_0$-維格 $\{(k_1,\cdots,k_i,\cdots)|k_i\in\mathbb{N},i\in\mathbb{N}\}$。
註. 使用 $\aleph_0$-層歸納法在數學歸納法中算最複雜笨重的用法。

5 如何有效運用數學歸納法

明智使用數學歸納法可避免煩瑣，使證明更有意義、有效、具建造性。歸納步驟內的工作應儘可能從簡並將工作量降至最低。經驗法則爲儘可能將沒必要放進歸納步驟中的工作從歸納步驟中移出。換言之，數學歸納法只該用在證明中無法省略的部分。

在電腦程式中數學歸納法涉及遞歸操作；爲節省記憶及操作的費用，歸納步驟內的工作應儘可能從簡並將工作量降至最低。

例 5.1. (Peano 存在性定理)
試比較 Coddington–Levinson [1, p.6, Theorem 1.2] 與 Hartman [3, p.10, Theorem 2.1] 的證明。第一、前一證明提供了誤差估計 [Coddington–Levinson [1, p.3, theorem 1.1]]，而後一證明則否。第二、Coddington–Levinson [1, p.4, Fig. 1] 用有限歸納法建造 φ，而 Hartman [3, p.10, (2.1)] 對 n 作有限納法以擴展 y_ε 之定義域 $[t_0,t_0+n\varepsilon]$。歸納步驟在前一建造中涉及畫直線並找其與垂直線的交點；工作簡單且可用有限步完成。兩相對照，歸納步驟在後一建造中涉及需經無限手續的積分。第三、根據極限的定義，用 $\lim_{y\to\infty}y_n$ 時必須對 n 作數學歸納法。前幾個除外的所有自然數均需列入考慮。試比較二證明的主要歸納步驟。爲從 Coddington–Levinson [1, p.6, (1.6)] 得到 Coddington–Levinson [1, p.7, (1.7)] ，僅需注意 $|\Delta_n(t)|\le\varepsilon_n$。兩相對照，從 Hartman [3, p.10, (2.1)]導出 Hartman [3, p.9, (1.5)] 需較多運算：
$|f(t,y_{\varepsilon(n)}(t-\varepsilon(n)))-f(t,y(t))|$
$\le K|y_{\varepsilon(n)}(t-\varepsilon(n))-y(t)|$
$\le K[|y_{\varepsilon(n)}(t-\varepsilon(n))-y_{\varepsilon(n)}(t)|+|y_{\varepsilon(n)}(t)-y(t)|]$
$\le K[M\varepsilon(n)+|y_{\varepsilon(n)}(t)-y(t)|]\Theta$
第四、兩證明均用到 Ascoli 引理 [Coddington–Levinson [1, p.6, −12]; Hartman [3, p.11, l.2]]。從上述考慮看來， Levinson 的證明避開複雜化且聚焦於定理的精隨。

註.

表 5.1: 火車與數學歸納法對比

火車	數學歸納法
爲節省費用，減少班次並增加每節車廂載重。	爲避免濫用，在證明中儘可能減少使用數學歸納法的次數。讓每一歸納步驟多做些工作。
爲增加火車速度，應將每節車廂載重量減至最低。	對電腦而言，爲增進其效率與節省其記憶及操作費用，應在每一歸納步驟中儘可能減少其工作量。
依實際需要計畫減少火車行駛次數及增加其速度，應在每節車廂載重量的多寡之間尋求均衡調製。	依實際需要計畫減少使用數學歸納法的次數及增進電腦效率，應在每一歸納步驟工作量的多寡之間尋求均衡調製。

6 有關數學歸納法的雜記

(1). (有限項之和) 數學歸納法可用來描述自然數集。有限歸納法可用來描述有限個自然數所成集。求和時指數集之基數 (cardinal number) 可爲有限。求和時不應只列前幾項；應明確指出末項。記號應簡潔、便於操作、易顯示簡單關係。試比較 Hobson [4, p.107, (7); p.108, (10)] 與 Watson [7, p.33, l.17–l.18] 中等式。

(2). (數學歸納法之限度) 從本質上説，無創意；僅有助於整理證明。Watson [7, p.33, l.12–p.34, l.−10] 中之證明提供展式 Watson [7, p.34, (1)] 並證其爲眞。爲省略精緻的分析，Lommel 用歸納法證明同一等式 [Watson [7, p.34, l.−6–p.35, l.8]]。注意後一證明獨自無法提供展式的形式。
註. 教科書中的錯誤可決定讀者的學術水平：不能發現錯誤、能發現錯誤或能改正錯誤。Watson [7, p.35, l.6-l.7] 中的論證錯誤應改正如下：

改正. 由 Watson [7, p.16, (4)] 知 $|J_n(z)| \le \frac{|\frac{z}{2}|^n}{n!}\exp(\frac{|z|^2}{4})$。
$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(m+n)!}{n!}|J_{m+2n}(z)| + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(m+n)!}{n!}|J_{m+2n+2}(z)|$
$\le |\frac{z}{2}|^m \exp(\frac{|z|^2}{4})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(|\frac{z}{2}|^2)^n}{n!} + |\frac{z}{2}|^{m+2}\exp(\frac{|z|^2}{4})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(|\frac{z}{2}|^2)^n}{n!}$ 。 □

參考文獻

[1] Coddington E. A. & Levinson N.: *The Theory of Ordinary Differential Equations*, New York: McGraw-Hill, 1955.

[2] Guo, D. R. & Wang, Z. X.: *Special Functions*, translated from the Chinese by D. R. Guo & X. J. Xio, Singapore: World Scientific, 1989.

[3] Hartman, P.: *Ordinary Differential Equations*, 2nd ed., Boston: Birkhäuser, 1982.

[4] Hobson, E. W.: *A Treatise on Plane Trigonometry*, 4th ed., Cambridge: Cambridge University Press, 1918.

[5] Wang, L. C.: `http://www.lcwangpress.com/physics/induction.htm`

[6] Watson, G. N. & Whittaker E. T.: *A Course of Modern Analysis*, 4th ed., Cambridge: Cambridge University Press, 1963.

[7] Watson, G. N.: *Theory of Bessel Functions*, 2nd ed., Cambridge: Cambridge University Press, 1966.

Mr. Li-Chung Wang is the author of the following website about the philosophy of mechanics: http://www.lcwangpress.com/physics/main.html.
通訊處：桃園縣中壢市普義里18鄰溪洲街267巷21號7樓, Taiwan, ROC.
E-mail:lcwangpress@yahoo.com