物理學家未能解決的數學問題

王立中

二〇二一年十二月二十四日

摘要

物理中存在著許多物理學家常用但未能證明的數學命題。現在我將於下列各節中試圖討論這些問題：
§1. 完整約束術與自由度之間的關係

關鍵詞：

1 完整約束數與自由度之間的關係

無約束的 N 質點所乘系統有 $3N$ 獨立坐標或自由度。若存在以 k 條 (1.37) 形式之方程來表示的完整約束程，則可用這 k 條方程使得 $3N$ 新坐標中有 k 個爲零，且此系統被稱爲具 $3N-k$ 個自由度 [Goldstein [2, p.13, l.-18–l.-14]]。假設 $k=1$ 且約束具形式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n)=0$。令 $x_n'=f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n)\quad(*)$。則坐標 $(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n')=(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},0)$ 具 $n-1$ 個自由度。可解 $(*)$ 而得 $x_n=g(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n')$。

紅色命題之證明. 只需證情況 $k=1$。
I. 情況 I：約束爲線性。經由坐標變換可設方程爲齊次。則此情況之證明可參見 Jacobson [3, vol.II, p.45, Theorem 4]。例如可用此 Jacobson 的定理來證 $\dim M^R\cap M^S=n^2-1$ [Chevally [1, p.8, l.-9–l.-8]]。
II. 特殊情況 (指數函數 $\exp:\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})\to GL(n,\mathbb{C})$ 的情況)
Chevally [1, p.8, Proposition 5] 用拓撲流形之維數的唯一性來證
(a). $\dim M^S=\dim SL(n,\mathbb{C})$。

$\exp : M^S \to SL(n,\mathbb{C})$		
定義域中元及其對應影像	$A=(a_{ij})$	$\exp A=(x_{ij})$
約束	$\mathrm{Sp}\,A=\sum_i a_{ii}=0 \quad (1)$	$\det(x_{ij})=\det(\exp A)=\exp(\mathrm{Sp}\,A)$ [Chevally [1, p.6, Corollary 1]]$=1 \quad (1^*)$
觀察	約束數相同；(1) 與 (1^*) 之間的關係是明確的 [Chevally [1, p.5, Proposition 2]]；若將 (1) 中之 a_{ij} 代以 x_{ij}，則 (1) 變成 (1^*)，反之亦然。	

(b). $\dim M^{sh} = \dim U(n)$.

$\exp : M^{sh} \to U(n)$		
定義域中元及其對應影像	$A=(a_{ij})$	$\exp A=(x_{ij})$
約束	${}^t\alpha=-\bar{\alpha} \quad (2)$	$\exp({}^t\alpha)=\exp(-\bar{\alpha}) \Leftrightarrow {}^t(\exp\alpha) = (\overline{\exp\alpha})^{-1} \Leftrightarrow (\exp\alpha)^* = \overline{\exp\alpha} \quad (2^*)$
觀察	約束數相同；(1) 與 (1^*) 之間的關係是隱匿的，但 Chevally [1, p.7, Proposition 4] 允許我們預測一般情況；若將 (2) 中之 a_{ij} 代以 x_{ij}，則 (2) 變成 (2^*)，反之亦然 [Chevally [1, p.8, Lemma 1]]。	

III. 一般情況（局部微分同胚情況 [Lee [4, p.79, Theorem 4.5]；坐標變換即指此情況]）。

令 M,N 爲 n-維光滑流形，F 爲從 M 映成 N 之局部微分同胚，且 $G(p)=0$ 爲 $p\in M$ 上的光滑約束。局部地，可將 M 視爲 T_pM, F 視爲 dF，且 $G(p)$ 視爲其線性近似。則一般情況化簡爲情況 I。 □

參考文獻

[1] Chevally, C.: *Theory of Lie groups I*, Princeton: Princeton University Press, 1946.

[2] Goldstein, H., Poole, C., & Safko, J: *Classical Mechanics*, 3rd, ed.,New York: Addison-Wesley, 2001.

[3] Jacobson, N.: *Lectures in Abstract Algebra*, 3 vols., Princeton: Van Nostrand, vol. 1 (1951), vol. 2 (1953), vol.3 (1964).

[4] Lee, J. M.: *Introduction to smooth manifolds*, 2nd ed., New York: Springer , 2013.

Mr. Li-Chung Wang is the author of the following website about the philosophy of mechanics: http://www.lcwangpress.com/physics/main.html.
通訊處：桃園縣中壢市普義里18鄰溪洲街267巷21號7樓, Taiwan, ROC.
E-mail:lcwangpress@yahoo.com